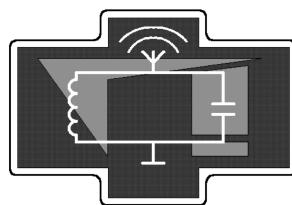


Московский государственный университет
им М.В. Ломоносова
Физический факультет

А.В. Журавлев

ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ

Методическая разработка для спецкурса



Москва.

Последние изменения внесены 16 марта 2020 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ	3
1.1. Операторы в криволинейных ортогональных координатах	5
1.2. Дивергенция	13
1.3. Ротор	14
1.4. Градиент	16
1.5. Оператор Лапласа	17
1.6. Уравнения Максвелла в криволинейных ортогональных координатах	18
2. РЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ. РЕШЕНИЕ В ОБЩЕМ ВИДЕ.	22
2.1. Разделение переменных. Потенциалы	24
2.2. Компоненты полей	25
2.3. Граничные условия	28
2.4. Общие свойства TE- и TM- волн в поперечно-однородных волноводах	30
2.5. Точный вывод скорости переноса энергии	34
3. ТЕМ ВОЛНЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ	38
4. КВАЗИПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ	51
5. ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ	56
6. ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ	65
ЛИТЕРАТУРА	74

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Теоретическое исследование электромагнитных волн базируется на хорошо известных уравнениях Максвелла. В качестве общих руководств по теории электромагнитных волн, включая теорию волноводов, можно рекомендовать книги [1, 2]. Здесь ограничимся лишь кратким напоминанием основных соотношений.

Уравнения Максвелла связывают между собой четыре векторных величины, характеризующих электромагнитное поле в материальной среде: напряженности электрического и магнитного поля, **E** и **H**, и векторы электрической и магнитной индукции **D** и **B**. В системе СИ уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= \rho. \end{aligned} \tag{1.1}$$

В уравнения Максвелла входят также плотность заряда ρ и плотность электрического тока \mathbf{j} . С уравнениями Максвелла совместны такие общие свойства электромагнитных процессов, как сохранение заряда и сохранение энергии. Законы сохранения в дифференциальной форме имеют подобный вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \text{div } \mathbf{S} &= -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В последнем уравнении W – плотность электромагнитной энергии, а **S** – плотность ее потока (вектор Умова - Пойнтинга). Как известно:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}, \\ \mathbf{S} &= [\mathbf{E}, \mathbf{H}]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

При рассмотрении задач распространения волн в волноводах материальные среды часто можно считать линейными, изотропными, однородны-

ми. Для таких сред материальные уравнения наиболее просты:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (1.4)$$

где ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости, а ε_0 и μ_0 – электрическая и магнитная постоянные. В линейных средах, благодаря принципу суперпозиции, любой сигнал можно рассматривать как сумму конечного или бесконечного числа монохроматических волн, имеющих разные частоты и распространяющихся независимо.

Уравнения (1.1) – (1.3) считаются справедливыми для реальных физических полей. Вместе с тем для монохроматических волн удобно пользоваться комплексными амплитудами полей таким образом, что физические поля определяются как реальная часть от комплексных амплитуд, домноженных на временную составляющую:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} [\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)]. \quad (1.5)$$

Здесь и в дальнейшем в качестве основной временной зависимости мы рассматриваем $\exp(-i\omega t)$. Аналогичные представления имеют также место для физических полей $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. При этом величины $\mathbf{E}(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, $\mathbf{D}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ являются их комплексными амплитудами, зависящими от пространственных координат.

При изучении распространения волн можно часто полагать, что среда не имеет объемных зарядов и ток в рассматриваемой области пространства отсутствует ($\rho \equiv 0$, $\mathbf{j} \equiv 0$). Тогда уравнения Максвелла для комплексных амплитуд монохроматического поля сводятся к виду:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= -i\omega \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu \mu_0 \mathbf{H}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

Заметим, что уравнения (1.6) справедливы в изотропных средах при наличии в них диссипации и дисперсии, причем в этом случае материальные параметры будут комплексными функциями частоты. Вместе с

тем, при создании направляющих систем как правило стремятся использовать материалы с минимальной дисперсией в заданном диапазоне частот. Для монохроматических полей представляют интерес не мгновенные значения плотности энергии и вектора Умова – Пойнтинга (которые находятся по формулам (1.3)), а их значения, усредненные по периоду колебаний $\langle W \rangle_t$ и $\langle \mathbf{S} \rangle_t$. С учетом (1.5) для них имеют место формулы:

$$\begin{aligned}\langle W \rangle_t &= \frac{1}{4}(\varepsilon \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 + \mu \mu_0 |\mathbf{H}|^2), \\ \langle \mathbf{S} \rangle_t &= \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*],\end{aligned}\tag{1.7}$$

где звездочка означает комплексное сопряжение.

Уравнения Максвелла для комплексных амплитуд (1.6) используются как в программах численного моделирования, так и для аналитических расчетов. Большой интерес представляют собой аналитические решения этих уравнений для относительно простых геометрий. Они могут использоваться для проверки математических пакетов и их численных решений.

При анализе конкретных электродинамических задач необходимо задание начальных и граничных условий. Для гармонических колебаний задавать начальные условия не требуется в связи с тем, что рассматривается установившийся процесс. Граничные условия – вот что определяет сложность и разнообразие задач о распространении волн в направляющих системах. Получение таких решений возможно путем выбора подходящих систем координат для упрощения граничных условий и для разделения переменных.

1.1. Операторы в криволинейных ортогональных координатах

Пусть положение некоторой точки \mathbf{r} в пространстве задано тройкой декартовых координат x, y, z .

Однако во многих задачах целесообразно определять положение точки \mathbf{r} не декартовыми, а *криволинейными координатами* – тремя числами q_1, q_2, q_3 более подходящими рассматриваемой частной задаче [3, 4].

Предположим, для каждой точки пространства такие числа заданы, т.е. они являются функциями от декартовых пространственных координат:

$$\begin{cases} q_1 = f_1(x, y, z), \\ q_2 = f_2(x, y, z), \\ q_3 = f_3(x, y, z). \end{cases} \quad (1.8)$$

(иногда приходится, как будет показано на примерах, несколько ограничивать область изменения переменных q_1, q_2, q_3).

Для того, чтобы совокупность чисел q_1, q_2, q_3 служили *однозначными* координатами в исследуемой области пространства, необходимо существование и обратного преобразования:

$$\begin{cases} x = \varphi_1(q_1, q_2, q_3), \\ y = \varphi_2(q_1, q_2, q_3), \\ z = \varphi_3(q_1, q_2, q_3). \end{cases} \quad (1.9)$$

Рассмотрим поверхности уровня, когда одна из криволинейных координат равна константе:

$$q_1 = \text{const}, \quad q_2 = \text{const}, \quad q_3 = \text{const}.$$

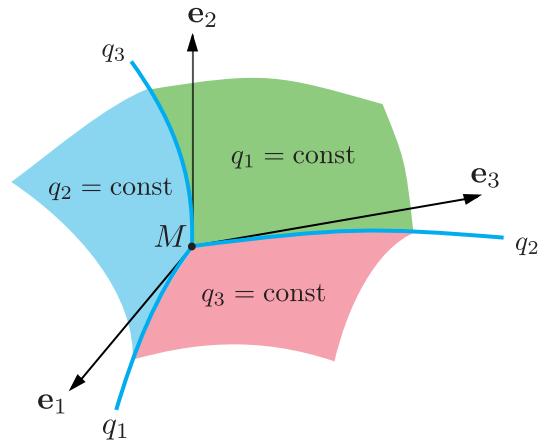


Рис. 1.1. Криволинейные координаты в трехмерном аффинном пространстве

Через каждую точку M пространства проходит по одной поверхности каждого семейства (рис. 1.1). Назовем эти поверхности *координатными*.

ми поверхностями. Линии пересечения двух координатных поверхностей назовем *координатными линиями*. Отметим, что на координатной линии q_1 , очевидно, меняется только координата q_1 , координаты же q_2 и q_3 сохраняют неизменное значение. Аналогичное утверждение справедливо и для других линий, т.е. на координатной линии меняется только одна криволинейная координата, соответствующая этой линии, при этом две другие криволинейные координаты остаются постоянными.

В качестве примера рассмотрим цилиндрические и сферические координаты. В цилиндрических координатах (рис. 1.2) положение точки определяется тремя координатами $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$. Формулы (1.9) имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (1.10)$$

Изменяя координату ρ от 0 до ∞ , координату φ от 0 до 2π , координату z от $-\infty$ до ∞ , мы получим все точки пространства. Координатными поверхностями являются

$\rho = \text{const}$ — цилиндры с осью Oz

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, ограниченные осью Oz

$z = \text{const}$ — плоскости, перпендикулярные оси Oz

Координатными линиями являются: лучи, перпендикулярные оси Oz и начинающиеся на этой оси (линия ρ), окружности с центром на оси Oz , лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси (линии φ), и прямые, параллельные оси Oz (линии z).

В сферических координатах (рис. 1.3) положение точки определяется координатам $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$. Формулы (1.9) имеют вид

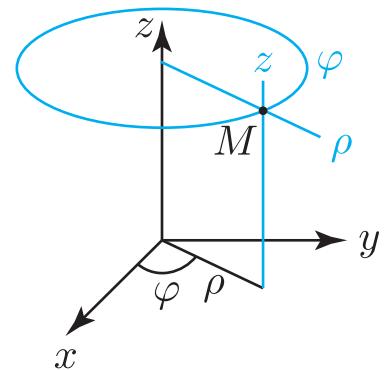


Рис. 1.2.

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (1.11)$$

Изменяя r от 0 до ∞ , θ от 0 до π и φ от 0 до 2π , получим все точки пространства. Координатными поверхностями являются

$r = \text{const}$ — сферы с центром в O

$\theta = \text{const}$ — полуконусы с осью Oz

$\varphi = \text{const}$ — плоскости, ограниченные осью Oz

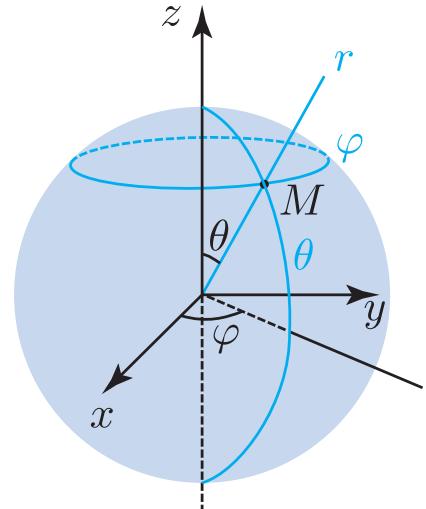


Рис. 1.3.

Координатными линиями являются: радиусы (линии r), меридианы (линии θ) и параллели (линии φ).

Возвращаясь к общим криволинейным координатам q_1, q_2, q_3 для удобства зададим единичные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, направленные по касательным к координатным линиям в точке M в сторону возрастания, соответственно, переменных q_1, q_2, q_3 (см. рис. 1.1).

В декартовых координатах также часто вводят единичные вектора $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, направленные по касательным к координатным линиям x, y, z . Направления этих векторов задаются один раз не меняются в дальнейшем. С другой стороны, в криволинейных координатах направления векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ меняются от точки к точке пространства. Разовое задание направления ортов там не возможно. Прежде чем находить направления ортов в криволинейных координатах давайте с Вами рассмотрим альтернативный вариант введения ортов в декартовых координатах.

Зададим радиус вектор $\mathbf{r}(x, y, z)$, указывающий на какую-либо точку пространства M проинфиренцируем по x , т.е. рассмотрим производную $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}$. В случае, если все три переменные (x, y, z) являются независимыми,

очевидно в результате получится:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \{x, y, z\} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \right\} = \{1, 0, 0\} = \mathbf{i}, \quad (1.12)$$

где в фигурных скобках указаны компоненты вектора. Таким образом декартовых координатах производные по координатам от радиус вектора дают единичные векторы вдоль координатных линий.

Аналогично обстоит ситуация в криволинейных координатах. Про-дифференцируем радиус вектор $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, например, по q_1 и составим производную $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$. В связи с тем, что при частном дифференцировании по q_1 , величины q_2 и q_3 , считаются постоянными, конец вектора \mathbf{r} движется вдоль линии q_1 , а потому вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ направлен по касательной к координатной линии q_1 в сторону возрастания этой величины т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = h_1 \mathbf{e}_1, \quad (1.13)$$

где h_1 – длина вектора $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$. Другими словами получается единичный вектор, направленный вдоль координатной линии с некоторым коэффициентом. Аналогичные утверждения и справедливы и для двух других производных.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = h_2 \mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} = h_3 \mathbf{e}_3,$$

Найдем квадрат коэффициента h_1 , возведя (1.13) в квадрат и пользуясь тем, что \mathbf{e}_1 – единичный вектор:

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)^2$$

Отметим, что этим выражением пользоваться не так удобно для нахождения h_1^2 в связи с тем, что нужно задавать радиус вектор вдоль координатной линии, а это представляет собой дополнительную задачу. Чаще идут другим путем. Пусть заданы криволинейные координаты, как функции декартовых, это соотношения (1.8). В этом случае для произ-

водной, получим:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(x, y, z)}{\partial q_1} = \left\{ \frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \frac{\partial z}{\partial q_1} \right\}. \quad (1.14)$$

Тогда для квадрата коэффициента h_1 будет справедливо следующее выражение:

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1} \right)^2. \quad (1.15)$$

Обобщим (1.15) для всех трех коэффициентов h_1, h_2, h_3 , тогда будет справедливо равенство:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i} \right)^2, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.16)$$

Величины h_1, h_2 и h_3 называются *коэффициентами Ламэ* или *масштабными коэффициентами*.

Теперь, когда определены единичные векторы вдоль координатных линий в произвольной точке M , можно разложить какой-либо вектор \mathbf{a} по этим трем некомпланарным векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.17)$$

Наиболее часто употребляют *криволинейные ортогональные координаты* – координаты, для которых справедливы соотношения:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta_{ik}, \quad (1.18)$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, который равен единице при $i = k$ и равен нулю при $i \neq k$. В криволинейных ортогональных координатах, координатные линии в каждой точке пространства взаимно перпендикулярны. Очевидно, что цилиндрические и сферические координаты являются ортогональными. В дальнейшем будем рассматривать исключительно ортогональные криволинейные координаты.

Вернемся к разложению (1.17), в нем a_1, a_2, a_3 будем называть *кристаллийными составляющими* вектора **a** или же *проекциями вектора a на оси кристаллийных координат*. Раскладывая, в частности, вектор $d\mathbf{r}$, мы получим

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3} dq_3 = h_1 dq_1 \mathbf{e}_1 + h_2 dq_2 \mathbf{e}_2 + h_3 dq_3 \mathbf{e}_3. \quad (1.19)$$

Составляющие вектора $d\mathbf{r}$ будем называть *элементарными дугами*

$$ds_i = h_i dq_i, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.20)$$

Возводя обе части (1.19) в квадрат и замечая, что $(d\mathbf{r})^2 = ds^2$, $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \delta_{ik}$, получим для квадрата длины элемента $d\mathbf{r}$ формулу

$$dr^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2. \quad (1.21)$$

Пусть $d\mathbf{r} = \overrightarrow{MN}$, где N – бесконечно близкая к M точка. Проведем

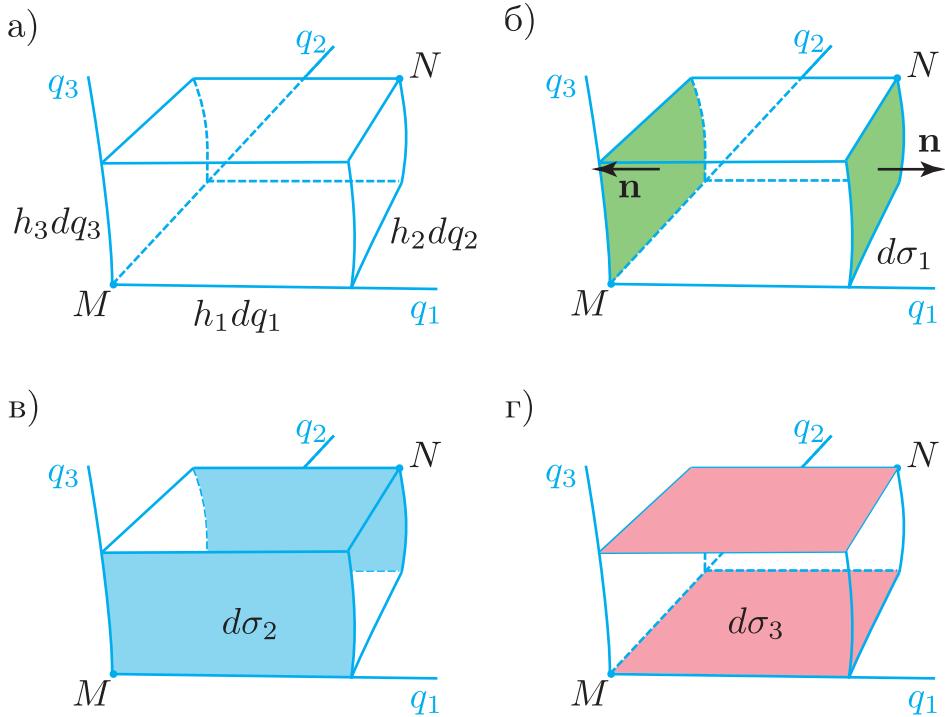


Рис. 1.4.

через N три координатных поверхности, которые вместе с проходящими через точку M тремя координатными поверхностями, образуют криволинейный бесконечно малый параллелепипед. Он понадобится для вывода операторов дивергенции и ротора в криволинейных координатах, разберем его более подробно. Очевидно, ребрами этого параллелепипеда будут служить:

$$ds_1 = h_1 dq_1, \quad ds_2 = h_2 dq_2, \quad ds_3 = h_3 dq_3 \quad (1.22)$$

Этими формулами очень удобно пользоваться для нахождения коэффициентов Ламэ при условии если известно, как выглядят координатные линии. Так, например, если обратить внимание на координатные линии цилиндрических координат (см. рис. 1.2), то нетрудно заменить, что дифференциалы дуг вдоль этих линий описываются соотношениями:

$$ds_1 = d\rho, \quad ds_2 = \rho d\varphi, \quad ds_3 = dz. \quad (1.23)$$

Если эти соотношения сравнить с (1.22), то можно увидеть, что для цилиндрических координат

$$h_1 \equiv h_\rho = 1, \quad h_2 \equiv h_\varphi = \rho, \quad h_3 \equiv h_z = 1.$$

Точно также для сферических координат (согласно рис. 1.3) имеем

$$ds_1 = dr, \quad ds_2 = r d\theta, \quad ds_3 = r \sin \theta d\varphi. \quad (1.24)$$

и поэтому

$$h_1 \equiv h_r = 1, \quad h_2 \equiv h_\theta = r, \quad h_3 \equiv h_\varphi = r \sin \theta.$$

Границы криволинейного параллелипипеда (рис. 1.4) будут иметь площади

$$d\sigma_1 = h_2 h_3 \cdot dq_2 dq_3, \quad d\sigma_2 = h_1 h_3 \cdot dq_1 dq_3, \quad d\sigma_3 = h_1 h_2 \cdot dq_1 dq_2, \quad (1.25)$$

а его объем будет равен

$$dV = h_1 h_2 h_3 \cdot dq_1 dq_2 dq_3. \quad (1.26)$$

1.2. Дивергенция

Найдем выражение для дивергенции в криволинейных координатах, напомним ее определение в интегральной форме. Дивергенция векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, заданного как функция от \mathbf{r} – это предел, к которому стремится отношение потока вектора через замкнутую поверхность, охватывающую данную точку, к объему, заключенному внутри данной поверхности:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{V_s \rightarrow 0} \frac{1}{V_s} \int_s \mathbf{A} \mathbf{n} dS \quad (1.27)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности.

Рассмотрим в качестве объема интегрирования элементарный параллелепипед (рис. 1.4): $V_s = h_1 h_2 h_3 \cdot dq_1 dq_2 dq_3$ Поверхностный интеграл в (1.27) можно разбить на шесть слагаемых по числу боковых граней. Рассмотрим два из них – интегралы по площадкам $q_1 = \operatorname{const}$ и $(q_1 + dq_1) = \operatorname{const}$ (рис. 1.4 б). На этих двух площадках разными будут являться только координаты q_1 , остальные координаты будут одни и те же. Поэтому поток через грань $q_1 = \operatorname{const}$ будет

$$(-A_1 \cdot h_2 dq_2 \cdot h_3 dq_3) \Big|_{(q_1, q_2, q_3)} = -(A_1 h_2 h_3) \Big|_{(q_1, q_2, q_3)} dq_2 dq_3 \quad (1.28)$$

а поток через грань $(q_1 + dq_1) = \operatorname{const}$ будет

$$(A_1 \cdot h_2 dq_2 \cdot h_3 dq_3) \Big|_{(q_1 + dq_1, q_2, q_3)} = (A_1 h_2 h_3) \Big|_{(q_1 + dq_1, q_2, q_3)} dq_2 dq_3 \quad (1.29)$$

Учитывая, что для какой-либо функции f трех переменных справедливо соотношение

$$f(q_1 + dq_1, q_2, q_3) - f(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial f}{\partial q_1} dq_1,$$

получим, что сумма двух потоков (1.28) и (1.29) равна величине:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) \cdot dq_1 dq_2 dq_3$$

Суммируя по трем парам площадок (рис. 1.4 б, в, г), получим

$$\int_s \mathbf{A} \mathbf{n} dS = \frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) \cdot dq_1 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) \cdot dq_1 dq_2 dq_3 + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \cdot dq_1 dq_2 dq_3$$

В итоге находим:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right). \quad (1.30)$$

1.3. Ротор

Найдем выражение ротора в криволинейных координатах в произвольной точке M . Ротор векторного поля \mathbf{A} – это вектор $\operatorname{rot} \mathbf{A}$. Его проекция $\operatorname{rot}_n \mathbf{A}$ на какое-либо направление \mathbf{n} есть предел отношения циркуляции векторного поля по контуру L , ограничивающим плоскую перпендикулярную \mathbf{n} площадку, площадь которой ΔS стремится к нулю.

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} \quad (1.31)$$

Направление обхода контура выбирается так, чтобы, если смотреть в направлении \mathbf{n} , контур обходился по часовой стрелке (то есть по правилу буравчика).

Интересным является тот факт, что сам ротор по модулю будет равен максимуму выражения $\operatorname{rot}_n \mathbf{A}$ по всем возможным направлениям. При этом направление ротора будет соответствовать направлению \mathbf{n} , для которого этот максимум был достигнут.

Чтобы получить проекцию $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на координатную линию q_1 нужно взять контур L_1 , ограничивающий площадку $d\sigma_1$, проходящую через точку M и перпендикулярную q_1 (см. рис. 1.5 б). Напомним, что ее площадь равна

$$d\sigma_1 = h_2 h_3 \cdot dq_2 dq_3, \quad (1.32)$$

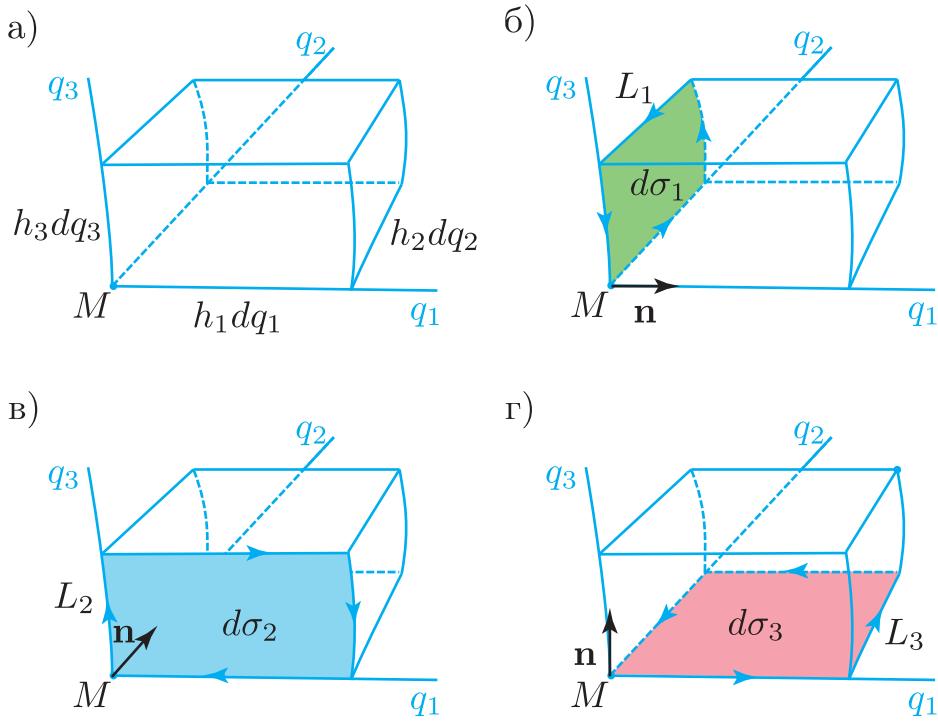


Рис. 1.5.

Интеграл (1.31) разобьем на четыре слагаемых. Так, интеграл можно записать:

$$\int_{L_1} \mathbf{A} d\mathbf{l} = (A_2 \cdot h_2 dq_2) \Big|_{(q_1, q_2, q_3)} + (A_3 \cdot h_3 dq_3) \Big|_{(q_1, q_2 + dq_2, q_3)} - (A_2 \cdot h_2 dq_2) \Big|_{(q_1, q_2, q_3 + dq_3)} - (A_3 \cdot h_3 dq_3) \Big|_{(q_1, q_2, q_3)}$$

Вынесем дифференциалы за скобки и комбинируя первое и третье, второе и четвертое слагаемое получим выражение:

$$\int_{L_1} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 A_3) \cdot dq_2 dq_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 A_2) \cdot dq_2 dq_3$$

Разделив полученный интеграл на площадь площадки $d\sigma_1$ получим окончательно для проекции ротора на ось q_1

$$(\text{rot } \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} h_3 A_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} h_2 A_2 \right). \quad (1.33)$$

Формулы для других компонент ротора аналогичны и получаются циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{A})_2 &= \frac{1}{h_3 h_1} \left(\frac{\partial}{\partial q_3} h_1 A_1 - \frac{\partial}{\partial q_1} h_3 A_3 \right), \\ (\text{rot } \mathbf{A})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} h_2 A_2 - \frac{\partial}{\partial q_2} h_1 A_1 \right). \end{aligned}$$

Полученные выражения можно компактно представить с помощью определителя:

$$\text{rot } \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{1}{h_2 h_3} & \frac{1}{h_1 h_3} & \frac{1}{h_1 h_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (1.34)$$

Строгий математический анализ вполне согласуется с элементарными соображениями, приведенными здесь в порядке напоминания. Он только позволяет утверждать, что формулы (1.30) и (1.34) справедливы независимо от способа предельного перехода, в частности, от формы поверхностей и контуров.

1.4. Градиент

Вспомним, как выглядит оператор градиента в декартовых координатах:

$$\text{grad } \psi = \mathbf{i} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

В криволинейных координатах выражение остается тем-же:

$$\text{grad } \psi = \mathbf{e}_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial \psi}{\partial s_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial \psi}{\partial s_3}.$$

В силу того, что $ds_i = h_i dq_i$ (согласно соотношению (1.23)) сразу получим:

$$\text{grad } \psi = \frac{\mathbf{e}_1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \quad (1.35)$$

1.5. Оператор Лапласа

Оператор Лапласа – это дивергенция градиента.

$$\Delta\psi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi$$

Еще раз приведем выражение для дивергенции (1.30), чтобы перед глазами были оба выражения:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 A_3) \right).$$

Комбинируя их, получим:

$$\Delta\psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right). \quad (1.36)$$

Часто используют двумерный оператор Лапласа, в котором присутствуют только поперечные координаты q_1 и q_2 , а продольная q_3 – не присутствует. Кроме того, предполагается, что $h_3 = 1$:

$$\Delta_{\perp}\psi = \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right). \quad (1.37)$$

1.6. Уравнения Максвелла в криволинейных ортогональных координатах

Используя формулы (1.30) и (1.34), можем записать в криволинейных координатах уравнения Максвелла для монохроматических полей (1.6):

$$i\omega\mu\mu_0 \cdot h_2 h_3 H_1 = \frac{\partial}{\partial q_2} h_3 E_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} h_2 E_2 \quad (\text{а})$$

$$-i\omega\epsilon\epsilon_0 \cdot h_2 h_3 E_1 = \frac{\partial}{\partial q_2} h_3 h_3 - \frac{\partial}{\partial q_3} h_2 H_2 \quad (\text{б})$$

$$i\omega\mu\mu_0 \cdot h_3 h_1 H_2 = \frac{\partial}{\partial q_3} h_1 E_1 - \frac{\partial}{\partial q_1} h_3 E_3 \quad (\text{в})$$

$$-i\omega\epsilon\epsilon_0 \cdot h_3 h_1 E_2 = \frac{\partial}{\partial q_3} h_1 h_1 - \frac{\partial}{\partial q_1} h_3 H_3 \quad (\text{г})$$

$$i\omega\mu\mu_0 \cdot h_1 h_2 H_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} h_2 E_2 - \frac{\partial}{\partial q_2} h_1 E_1 \quad (\text{д})$$

$$-i\omega\epsilon\epsilon_0 \cdot h_1 h_2 E_3 = \frac{\partial}{\partial q_1} h_2 h_2 - \frac{\partial}{\partial q_2} h_1 H_1 \quad (\text{е})$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 E_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 E_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 E_3) = 0 \quad (\text{ж})$$

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 h_3 H_1) + \frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 h_1 H_2) + \frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 h_2 H_3) = 0 \quad (\text{з})$$

Система (1.38) содержит восемь уравнений для шести независимых компонент поля – неизвестных функций координат. На первый взгляд она является переопределенной. Однако не все уравнения Максвелла независимы между собой. Легко убедиться, что в отсутствии токов и зарядов последние два уравнения являются следствием первых шести. В частности, продифференцировав (а), (б) и (д) по q_1 , q_2 и q_3 соответственно, и сложив их друг с другом, получим (ж). Система уравнений для шести переменных громоздка для анализа. Однако известны многочисленные способы ее упрощения. Путем введения вспомогательных функций – потенциалов удается уменьшить порядок системы уравнений (например

см. [2, 5]). Для многих задач о распространении электромагнитных волн в направляющих структурах удобен способ сведения векторной волновой задачи к скалярной, известный как метод потенциалов Дебая [5–7] (известный также как метод функций Боргниса). Будем рассматривать системы криволинейных координат, для которых справедливы условия: один из коэффициентов, например

$$h_3 \equiv 1, \quad (1.39)$$

а для двух других выполняется соотношение:

$$\frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \equiv 0. \quad (1.40)$$

Таким требованиям, в частности, удовлетворяют цилиндрическая и сферическая системы координат. Записанных выше условий достаточно для существенного упрощения системы (1.38). Если система координат удовлетворяет (1.39), (1.40), то для нее уравнения Максвелла (1.38) могут иметь семейства волновых решений двух типов, для которых либо $E_3 \equiv 0$ (ТЕ-волны), либо $H_3 \equiv 0$ (ТМ-волны). Рассмотрим вначале случай ТЕ-волн. Пусть $E_3 \equiv 0$, причем $h_3 \equiv 1$, тогда из (1.38)(ж), следует:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} h_2 E_1 + \frac{\partial}{\partial q_2} h_1 E_2 = 0$$

Напрашивается идея ввести такую потенциальную функцию U , чтобы ее производная по q_2 была пропорциональна $h_2 E_1$, а производная по q_1 была пропорциональна $h_1 E_2$. Более конкретно, положим:

$$E_1 = \frac{i\omega\mu\mu_0}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad E_2 = \frac{-i\omega\mu\mu_0}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Это обеспечивает обращение (1.38) (ж) в тождество. Подставим теперь выражения E_1 и E_2 в (1.38) (а) и (в), получим:

$$H_1 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right), \quad H_2 = \frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right).$$

Подставим последние выражения в уравнение (1.38) (е) и убедимся, что оно также удовлетворяется тождественно:

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \left[\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial q_2} \left[\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) \right].$$

Подставим теперь выражения компонент полей в (1.38) (г):

$$\frac{\partial}{\partial q_1} H_3 = i\omega \varepsilon \varepsilon_0 h_1 \frac{-i\omega \mu \mu_0}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} \frac{\partial U}{\partial q_1}.$$

Чтобы последнее равенство стало тождеством, достаточно положить:

$$H_3 = \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 U + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2} U$$

Наконец, подставим выражения для компонент полей в (1.38) (д). Получим уравнение:

$$\begin{aligned} i\omega \mu \mu_0 h_1 h_2 \left(\omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 U + \frac{\partial^2 U}{\partial q_3^2} \right) &= \\ &= -i\omega \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) - i\omega \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right), \end{aligned}$$

которое можно представить в более компактном виде:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial q_3^2} + \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) \right] + \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 U = 0 \quad (1.41)$$

Итак, мы использовали шесть из восьми уравнений (столько из них независимых) и убедились, что при определенных условиях все компоненты полей действительно можно выразить через потенциальную функцию U .

Общий вывод исследования можно сформулировать так. Если потенциал U является решением уравнения (1.41) то компоненты полей ТЕ-волн выражаются через потенциальную функцию U следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i\omega \mu \mu_0}{h_2} \frac{\partial U}{\partial q_2}, \quad E_2 = -\frac{i\omega \mu \mu_0}{h_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}, \quad E_3 = 0, \\ H_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_3}, \quad H_2 = \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 U}{\partial q_2 \partial q_3}, \quad H_3 = \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 U + \frac{\partial^2 U}{\partial q_3^2}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Заметим, что уравнение для потенциала U (1.41) не совпадает с волновым уравнением, поскольку входящий в него дифференциальный оператор второго порядка не совпадает с оператором Лапласа. Теперь рассмотрим случай ТМ-волн. Поскольку уравнения Максвелла обладают свойством симметрии относительно электрических и магнитных величин, можно не проводить независимого вывода уравнений для ТМ-волн, а получить соответствующие соотношения путем замены \mathbf{E} на \mathbf{H} , а $\varepsilon\varepsilon_0$ на $(-\mu\mu_0)$ и обратно. Очевидно, что при такой замене уравнение для потенциала ТМ-волн имеет точно такой же вид, что и (1.41). Итак, приходим к следующему утверждению. Если известно решение уравнения (1.41) для потенциала V , соответствующего семейству волн типа ТМ ($H_3 \equiv 0$), то компоненты полей выражаются через потенциал V по формулам:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial^2 V}{\partial q_1 \partial q_3}, & E_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_3}, & E_3 &= \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 V + \frac{\partial^2 V}{\partial q_3^2}, \\ H_1 &= -\frac{i\omega \varepsilon \varepsilon_0}{h_2} \frac{\partial V}{\partial q_2}, & H_2 &= \frac{i\omega \varepsilon \varepsilon_0}{h_1} \frac{\partial V}{\partial q_1}, & H_3 &= 0. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Компоненты полей \mathbf{E} и \mathbf{H} должны не только удовлетворять уравнениям Максвелла (это обеспечивают (1.41), (1.42) и (1.43)), но сверх того – граничным условиям. Выбор подходящей системы криволинейных координат позволяет в ряде случаев получить граничные условия в простом виде и свести систему шестого порядка для компонент векторов электрического и магнитного поля к уравнению второго порядка для скалярной потенциальной функции U или V . В таких системах электромагнитные поля имеют вид ТЕ или ТМ-волн. Даже если граничные условия не столь просты и требуют, чтобы одновременно существовали обе продольные компоненты ($E_3 \neq 0$, $H_3 \neq 0$), полное электромагнитное поле можно представлять в виде линейной комбинации волн двух рассмотренных типов.

2. РЕГУЛЯРНЫЕ ВОЛНОВОДЫ. РЕШЕНИЕ В ОБЩЕМ ВИДЕ.

Волноводом принято называть непрерывную систему материальных поверхностей, которая обеспечивает распространение волн в заданном направлении. Это определение охватывает совокупность разнообразных систем, обеспечивающих направленное распространение электромагнитных волн. Некоторые наиболее распространенные волноводы изображены на рис. 2.1. Можно выделить ряд классов волноводов, которые различаются специфическими особенностями распространения волн. К их числу относятся:

1. Многопроводные и коаксиальные линии.
2. Полые волноводы с металлическими стенками.
3. Волноводы с диэлектрическими и металлическими вставками (замедляющими элементами), металлодиэлектрические волноводы.
4. Различного рода планарные системы (микрополосковые, компланарные, щелевые линии).
5. Диэлектрические волноводы, в том числе оптические волоконные световоды, планарные и градиентные волноводы интегральной оптики.

Представленное перечисление не претендует на строгую и исчерпывающую классификацию. Кроме того, следует иметь в виду, что направленное распространение волн может быть обеспечено не только с помощью волноводов (то есть “непрерывных систем материальных поверхностей”), но и посредством таких устройств, как антенны. В оптическом диапазоне роль антенн играют, в частности, линзы. Сосредоточим внимание на регулярных волноводах, то есть направляющих системах, свойства которых одинаковы в любом из поперечных сечений, перпендикулярных направлению распространения волны.

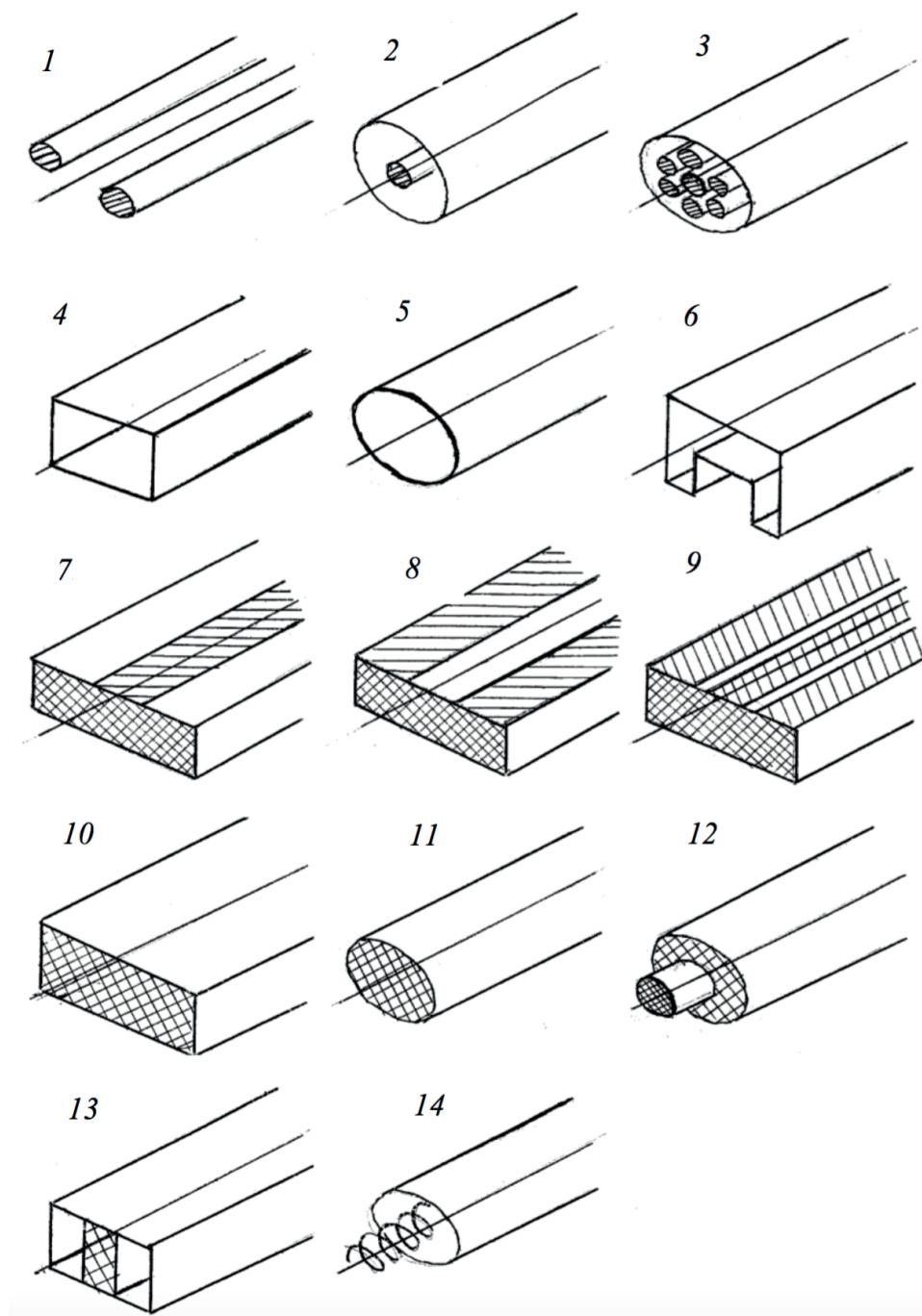


Рис. 2.1. Волноводы различных типов: 1 – двухпроводная линия, 2 – коаксиальная линия, 3 – многопроводный кабель, 4 – полый прямоугольный волновод, 5 – полый круглый волновод, 6 – П-образный волновод, 7 – микрополосковая линия, 8 – щелевая линия, 9 – компланарный волновод, 10 – плоский диэлектрический волновод, 11 – круглый диэлектрический волновод, 12 – двухслойный волоконный световод, 13 – прямоугольный волновод с диэлектрической вставкой, 14 – круглый волновод с металлической замедляющей спиралью.

2.1. Разделение переменных. Потенциалы

Введем систему координат, в которой направление распространения совпадает с координатной осью q_3 (в дальнейшем будем обозначать ее через z), а две другие оси лежат в перпендикулярном сечении. В такой, обобщенно-цилиндрической, системе координат выполнены требования (1.39), (1.40) которые предполагались при выводе уравнений для потенциалов TE- и TM-волн:

$$h_3 = 1, \quad \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_2}{h_1} \right) = 0.$$

В обобщенно-цилиндрических координатах уравнение для потенциала допускает разделение переменных. Сами потенциалы (U и V) можно представить в виде произведения функций, зависящих только от продольной и только от поперечных координат

$$(U, V) = \psi(q_1, q_2)\zeta(z).$$

Благодаря этому уравнение (1.41) разделяется на два:

$$\frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) \right] + \kappa^2 \psi = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 \zeta}{dz^2} + \gamma^2 \zeta = 0 \quad (2.2)$$

Входящие в уравнения величины γ и κ называются продольным и поперечным волновыми числами. Они не являются независимыми, а связаны между собой соотношением:

$$\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \omega^2 = \gamma^2 + \kappa^2$$

Учтем тот факт, что

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c}, \quad \sqrt{\varepsilon \mu} = n,$$

где c – скорость света в вакууме, n – комплексный показатель преломления среды, получим своеобразную «теорему Пифагора» для волновых чисел:

$$k^2 = \gamma^2 + \kappa^2, \quad (2.3)$$

где k – волновое число в среде, $k = (\omega/c)n = k_0 n$, k_0 – волновое число в вакууме.

Формулу (2.3) часто используют при отыскании закона дисперсии – функциональную зависимость между частотой ω и продольным волновым числом (постоянной распространения) γ .

2.2. Компоненты полей

2. Выпишем компоненты полей в обобщенно-цилиндрических координатах: ТЕ-волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{i\omega\mu\mu_0}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \zeta & H_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \zeta' \\ E_2 &= -\frac{i\omega\mu\mu_0}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \zeta & H_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \zeta' \\ E_3 = E_z &\equiv 0 & H_3 &= \left(k^2 \zeta + \frac{d^2\zeta}{dz^2} \right) \psi = \kappa^2 \zeta \psi \end{aligned} \quad (2.4)$$

и ТМ-волны:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \zeta' & H_1 &= -\frac{i\omega\varepsilon\varepsilon_0}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \zeta \\ E_2 &= \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial q_2} \zeta' & H_2 &= \frac{i\omega\varepsilon\varepsilon_0}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial q_1} \zeta \\ E_3 = E_z &= \kappa^2 \zeta \psi & H_3 = H_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $\zeta' = d\zeta/dz$. В отличие от волн в неограниченном пространстве, волны в волноводе имеют не только поперечные компоненты, но, как правило, и продольную составляющую поля. Из формул (2.4), (2.5), видно, что продольные компоненты магнитного или электрического полей

ТЕ и ТМ волн (H_z или E_z) пропорциональны потенциальным функциям (если только $\kappa \neq 0$).

Рассмотрим уравнение для продольных компонент (2.2), оно имеет общее решение в виде:

$$\zeta = Ae^{i\gamma z} + Be^{-i\gamma z} \quad (2.6)$$

Ранее мы условились рассматривать временную зависимость поля волны в виде $\exp(-i\omega t)$. Совместно с зависимостью (2.6) это дает две бегущих волны:

$$\zeta_+ = \exp[i(\gamma z - \omega t)],$$

$$\zeta_- = \exp[-i(\gamma z + \omega t)].$$

У первой поверхности постоянной фазы движутся в прямом направлении (в сторону возрастающих z), а у второй – в обратном направлении.

Чтобы убедиться в этом, уместно напомнить общее определение фазовой скорости. Если волновой процесс имеет вид $\sim \exp[i\chi(z, t)]$, где $\chi(z, t)$ – фазовый множитель, то фазовая скорость – это скорость перемещения поверхности постоянной фазы. По условию $\chi(z, t) = \text{const}$, поэтому находим:

$$d\chi = (\partial\chi/\partial z)dz + (\partial\chi/\partial t)dt = 0$$

откуда:

$$v_\Phi = \frac{dz}{dt} = -\frac{\partial\chi/\partial t}{\partial\chi/\partial z} \quad (2.7)$$

Определение (2.7) можно обобщить на трехмерный случай и применять также для неоднородных и анизотропных сред.

В нашем случае получаем: $v_\Phi = \omega/\gamma$ – для прямой волны и $v_\Phi = -\omega/\gamma$ – для обратной волны. При фиксированной частоте ω величина постоянной распространения γ не произвольна, а связана с поперечным волновым числом κ условием (2.3). В свою очередь число κ находится в результате решения краевой задачи для уравнения (2.1) с соответствующими граничными условиями. Каждое решение краевой задачи определяет волну, со своей, как правило уникальной, структурой поля. Волну,

соответствующую некоторой заданной паре значений продольного и поперечного волновых чисел, называют собственной волной.

Для бегущей волны имеем

$$\zeta(z) = e^{i\gamma z}, \quad (2.8)$$

и соответственно

$$\zeta'(z) = i\gamma e^{i\gamma z}, \quad (2.9)$$

при подстановке этих выражений в (2.4) и (2.5) убеждаемся в том, что поперечные компоненты электрического и магнитного полей синфазны, если только величины проницаемостей ϵ и μ действительны. Продольные компоненты магнитного поля (у волн TE) или электрического поля (у волн TM) имеют сдвиг по фазе на $\pi/2$ относительно поперечных компонент. Как следствие, вектор Умова – Пойнтинга, усредненный по времени (см. (1.3)) имеет только одну ненулевую компоненту, вдоль оси z , а в поперечных направлениях стационарные потоки энергии отсутствуют.

Расстояние, на котором фаза бегущей волны изменяется на 2π , равно длине волны в волноводе: $\gamma z = 2\pi$, $z = \lambda$, следовательно:

$$\lambda = 2\pi/\gamma \quad (2.10)$$

Помимо бегущих волн важное значение имеют стоячие волны в направляющих системах. Режим стоячих волн можно осуществить, расположив в сечении $z = 0$ линии передачи, перпендикулярном направлению распространения, идеально отражающее зеркало (проводящую поверхность). Тогда в (2.6) $A=B$. Граничные условия на поверхности проводника обеспечивают обращение в нуль составляющих электрического поля E_1 , E_2 (узел поля), а в силу периодичности зависимости $\zeta(z)$ в стоячей волне узлы поперечной компоненты электрического поля будут иметь место во всех сечениях $z = l\pi/\gamma(\omega)$, где $l = 1, 2, 3, \dots$. Поставив в одном из таких сечений вторую проводящую плоскость, можно создать резонатор,

то есть систему, обеспечивающую поддержание стоячих электромагнитных волн на дискретных частотах. Создание электромагнитных резонаторов является одним из важных применений отрезков направляющих структур.

3. Волны TE и TM обладают тем свойством, что их электрические и магнитные поля ортогональны друг другу:

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$$

Если рассматривать только поперечные составляющие этих полей, то они тоже ортогональны друг другу, причем, как видно из (2.4), (2.5):

$$\frac{E_1}{H_2} = -\frac{E_2}{H_1} \quad (2.11)$$

2.3. Границные условия

Электромагнитные поля на ограничивающих волновод поверхности должны удовлетворять граничным условиям. В общем случае это требования непрерывности тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей (\mathbf{E}_τ и \mathbf{H}_τ) на поверхности раздела сред. На поверхности проводника обычно задается условие идеально проводящей стенки ($\mathbf{E}_\tau = 0$).

Рассмотрим TE-волны. Наиболее простой вид имеет граничное условие, если поверхность идеального проводника совпадает с координатной поверхностью. Пусть, например, координатная поверхность $q_2 = C$ является идеально проводящей. В этом случае для TE-волн ($E_3 \equiv 0$) вектор \mathbf{E}_τ имеет одну компоненту $-E_1$, так что условие $\mathbf{E}_\tau = 0$ с учетом (2.4) эквивалентно требованию:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0 \quad (\text{при } q_2 = C) \quad (2.12)$$

Аналогично для поверхности $q_1 = C$, граничное условие запишется в виде: $\partial\psi/\partial q_1 = 0$. В общем случае граничные условия для потенциала для ТЕ волн будет

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (2.13)$$

где n – направление, перпендикулярное к проводящей поверхности. Это граничное условие будет справедливо для всех типов волноводов рис. 2.1.

Для ТМ-волн в общем случае нужно рассмотреть два случая: $\kappa = 0$ и $\kappa \neq 0$.

Случай, когда $\kappa \neq 0$ встречается в прямоугольных металлических и диэлектрических волноводах, см. рис. 2.1 4–6, 10–14 об этом более подробно будет в параграфах 5 и 6. Рассмотрим также как и в предыдущем случае сначала поверхность $q_2 = C$. Тангенциальный к этой поверхности вектор напряженности электрического поля \mathbf{E}_τ имеет две ненулевые компоненты: E_1 и E_3 (см. 2.5). Чтобы обеспечить выполнение $E_3 = 0$ при $q_2 = C$, необходимо потребовать:

$$\psi = 0 \quad (\text{при } q_2 = C) \quad (2.14)$$

В этом случае $\partial\psi/\partial q_2$ также обращается в ноль, а значит и E_1 – тоже, следовательно условие (2.14) будет являться граничным. Если аналогично рассмотреть граничное условие для $q_1 = C$, то можно сделать общий вывод о граничном условии для ТМ – волн на металлической границе раздела:

$$\psi = 0 \quad (2.15)$$

Второй случай, когда $\kappa = 0$ встречается в двухпроводных, многопроводных, коаксиальных и полосковых линиях см. рис. 2.1 1–3, 7–9 об этом будет более подробно в параграфах 3 и 4. Здесь E_3 обращается в ноль автоматически. Рассматривая как и в предыдущих случаях случаи $q_1 = C$ и $q_2 = C$ и обобщая для общего случая получим более мягкое

граничное условие на металлической границе:

$$\psi = \text{const} \quad (2.16)$$

Уравнения для поперечной волновой функции (2.1), совместно с граничными условиями (2.13), (2.15) и (2.16), образуют краевую задачу на собственные функции и собственные значения поперечного волнового числа κ .

2.4. Общие свойства ТЕ- и ТМ- волн в поперечно-однородных волноводах

Особую роль в теории волноводов играют случаи, когда среда в поперечном сечении однородна. Такие волноводы будем называть поперечно-однородными. Используем выражение для двумерного оператора Лапласа для поперечных координат Δ_{\perp} (1.37), тогда уравнение (2.1) сводится к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta_{\perp}\psi + \kappa^2\psi = 0, \quad (2.17)$$

где граничные условия имеют вид либо (2.13), либо (2.15). В этом случае все собственные волны волновода принадлежат либо к семейству ТЕ, либо к ТМ. Важно то, что для всех точек поперечного сечения значение κ^2 будет одним и тем же (см. (2.3)). Для различных мод величины κ^2 могут принимать дискретный ряд собственных значений, причем из общей теории краевых задач для уравнения Гельмгольца известно, что $\kappa^2 \geq 0$. Каждому собственному значению κ_a^2 уравнения Гельмгольца (2.1) соответствует своя собственная функция $\psi_a(q_1, q_2)$, через которую выражаются компоненты полей (см. (2.4) и (2.5)). Говорят о разных типах волн, или о разных поперечных модах, которые характеризуются этими собственными значениями и собственными функциями. Отметим

основные свойства собственных волн, общие для всех мод и для любых конфигураций поперечно-однородных волноводов.

1. В регулярных поперечно однородных волноводах законы дисперсии для всех типов волн оказываются подобными. Если подставить в (2.3) значение поперечного волнового числа $\kappa_a = \text{const}$, то получим:

$$\omega^2 - \omega_{\text{кр}a}^2 = \frac{\gamma^2 c^2}{\varepsilon \mu} \quad (2.18)$$

где $\omega_{\text{кр}a}$ – критическая частота a -й моды волновода.

$$\omega_{\text{кр}a} = \frac{\kappa_a^2 c^2}{\varepsilon \mu} \quad (2.19)$$

Зависимость $\gamma(\omega)$ вида (2.18) часто называют волноводным законом дисперсии. Ее график представляет собой гиперболу на плоскости частота – продольное волновое число (рис. 2.2).

Каждой из собственных волн поперечно-однородного волновода соответствует своя критическая частота. При этом распространение волны возможно, если $\omega > \omega_{\text{кр}a}$. Если же $\omega < \omega_{\text{кр}a}$, то волновое число γ становится чисто мнимым и колебательный процесс в волноводе представляет собой возмущение, экспоненциально спадающее с координатой (или экспоненциально нарастающее – в зависимости от того, где в волноводной системе находится источник энергии колебаний). Если не учитывать потери в стенах и в веществе, заполняющем волновод, эти колебания будут синфазными при всех значениях z .

Рассмотрим частотные зависимости фазовой и групповой скорости при волноводном законе дисперсии. Для фазовой скорости, $v_{\text{ф}} = \omega/\gamma$, из (2.18) имеем:

$$v_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{кр}a}^2}{\omega^2} \right)^{-1/2} \quad (2.20)$$

При этом групповая скорость, $v_{\text{гр}} = d\omega/d\gamma$, равна:

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{кр}a}^2}{\omega^2} \right)^{1/2} \quad (2.21)$$

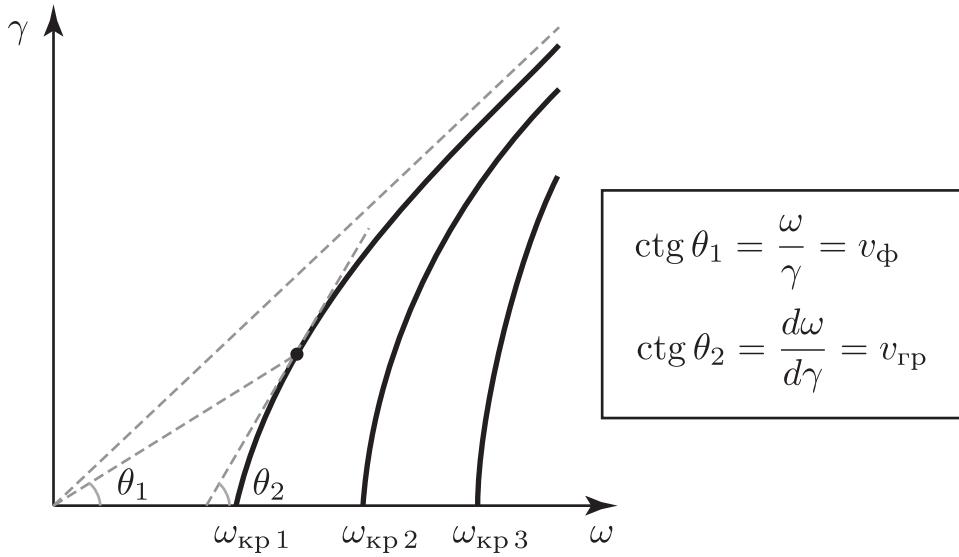


Рис. 2.2. Зависимость продольного волнового числа от частоты в случае волноводного закона дисперсии.

Зависимости $v_\phi(\omega)$ и $v_{\text{гр}}(\omega)$ изображены на рис. 2.3. В дальнейшем (в частности, в § 1.5) мы вернемся к обсуждению их смысла. Специфическим для собственных волн поперечно-однородных волноводов является свойство:

$$v_\phi v_{\text{гр}} = \frac{c^2}{\epsilon \mu} \quad (2.22)$$

2. В регулярном волноводе поперечные компоненты электрического и магнитного полей бегущей волны ортогональны друг другу, а отношение их амплитуд постоянно во всех точках волновода. Это отношение называют характеристическим сопротивлением волновода. В отсутствие потерь характеристическое сопротивление Z_x действительно, и можно полагать:

$$Z_x = \frac{|\mathbf{E}_\perp|}{|\mathbf{H}_\perp|}.$$

В системах с потерями между полями \mathbf{E}_\perp и \mathbf{H}_\perp имеется сдвиг фаз, и (комплексное) характеристическое сопротивление следует определять

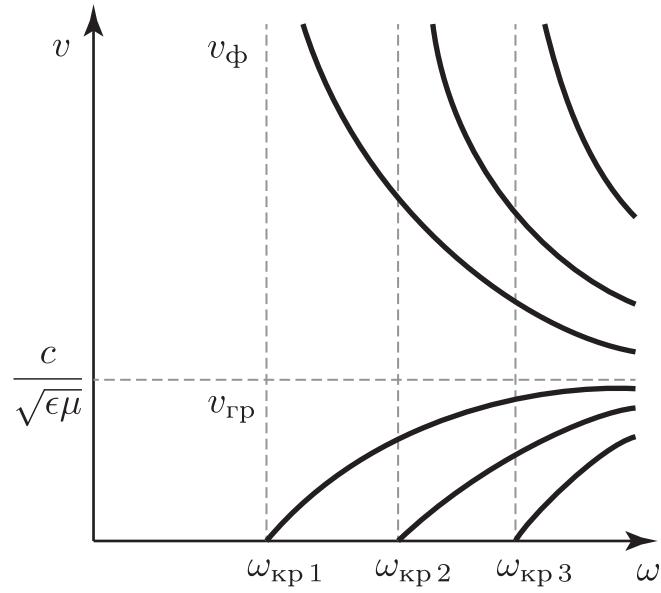


Рис. 2.3. Зависимости фазовой и групповой скорости от частоты в случае волноводного закона распространения.

более аккуратно:

$$Z_x = \frac{\sqrt{(\mathbf{E}_\perp \mathbf{E}_\perp)}}{\sqrt{(\mathbf{H}_\perp \mathbf{H}_\perp)}}. \quad (2.23)$$

Подставим в (2.23) выражения компонент полей (2.4) и (2.5). При этом учтем (2.8), (2.9) и (2.18). Получим, что для ТЕ-волн:

$$Z_x = \frac{i\omega\mu\mu_0}{i\gamma} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{кр}}a}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.24)$$

Для ТМ-волн:

$$Z_x = \frac{i\gamma}{i\omega\mu\mu_0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2 a^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

В системе СИ, где напряженность электрического поля измеряется в единицах В/см, а магнитного поля – А/см, характеристическое сопротивление имеет размерность Ом. В системе СГС Z_x – безразмерная величина.

3. Собственные моды поперечно-однородного волновода образуют полную ортогональную систему, причем соотношения ортогональности

для мод с номерами p и q ($p \neq q$) имеют вид:

$$\int \mathbf{E}_p \mathbf{E}_q da = 0, \quad \int \mathbf{H}_p \mathbf{H}_q da = 0,$$

где интеграл берется по поперечному сечению волновода. Свойство ортогональности и полноты мод волновода являются весьма важными [1, 2] для различных приложений.

2.5. Точный вывод скорости переноса энергии

4. Распространение волны сопровождается переносом энергии. В качестве скорости переноса энергии рассматривают $v_{\text{пр}}$. Однако широко известные способы обоснования этого утверждения справедливы, строго говоря, лишь для одномерных волновых пакетов. В реальных волноводах корректное доказательство равенства скорости переноса энергии и групповой скорости усложняется из-за того, что распределение полей в поперечном направлении неоднородно. С учетом этого, следует обобщить определение скорости распространения (переноса) энергии в волноводе. Это можно сделать, используя аналогию с определением скорости движения зарядов в проводнике, так, как это представлено в данной таблице:

Законы сохранения	
Зарядов	Энергии
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$	$\frac{\partial}{\partial t}(W_e + W_m) + \text{div } \mathbf{S} = 0$
Определения скорости переноса	
$v_q = I/Q$	$v_{\text{в}} = \langle S \rangle / \langle W \rangle$
Обозначения погонных величин	
$I(z) = \int_A \mathbf{j} \mathbf{n} da$	$\langle S(z) \rangle = \int_A \mathbf{S} \mathbf{n} da$
$Q(z) = \int_A q da$	$\langle W(z) \rangle = \langle W_e(z) \rangle + \langle W_m(z) \rangle$
	$\langle W_e(z) \rangle = \int_A W_e da$
	$\langle W_m(z) \rangle = \int_A W_m da$

Скорость переноса заряда определяется как отношение величины тока I , протекающего через данное сечение проводника A , к погонной плотности заряда Q в этом сечении, причем обе эти величины находят путем интегрирования по поперечному сечению. Аналогичным образом, скорость переноса энергии определяется как отношение потока энергии к погонной плотности энергии электромагнитной волны в волноводе, $\langle W \rangle = \langle W_e \rangle + \langle W_m \rangle$. В последнем случае на интегрирование по поперечному сечению волновода указывают угловые скобки. Найдем выражения для $\langle S \rangle$ и $\langle W \rangle$ в случае ТЕ-волн [8]. При вычислении интегралов по поперечному сечению волновода будем использовать формулы (1.7) для средних по времени величин:

$$\begin{aligned}\langle S \rangle &= \frac{1}{2} \int \operatorname{Re}[\mathbf{E}, \mathbf{H}^*] \mathbf{n} da = \frac{1}{2} \int_A \omega \mu \mu_0 \gamma \left[\left(\frac{1}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right)^2 \right] da = \\ &= \frac{\mu \mu_0 \omega \gamma}{2} \int (\nabla_{\perp} \psi)^2 da; \\ \langle W_e \rangle &= \frac{1}{4} \int_A \varepsilon \varepsilon_0 |\mathbf{E}|^2 da = \frac{1}{4} \mu \mu_0^2 \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \int (\nabla_{\perp} \psi)^2 da; \\ \langle W_m \rangle &= \frac{1}{4} \int_A \mu \mu_0 |\mathbf{H}|^2 da = \frac{1}{4} \mu \mu_0 \left[\gamma^2 \int (\nabla_{\perp} \psi)^2 da + \kappa_a^4 \int \psi^2 da \right].\end{aligned}$$

Преобразуем последнюю формулу с помощью векторного тождества:

$$\operatorname{div}_{\perp}(\psi \operatorname{grad}_{\perp} \psi) = (\nabla_{\perp} \psi)^2 + \psi \Delta_{\perp} \psi$$

Проинтегрировав его по поперечному сечению волновода, будем иметь:

$$\int \nabla_{\perp}(\psi \nabla_{\perp} \psi) da = \int (\nabla_{\perp} \psi)^2 da + \int \psi \Delta_{\perp} \psi da$$

Интеграл в левой части данного равенства можно представить с помощью теоремы Стокса в виде контурного интеграла по периметру волновода:

$$\int \nabla_{\perp}(\psi \nabla_{\perp} \psi) da = \oint \psi (\nabla_{\perp} \psi) dl$$

причем последний интеграл равен нулю, в силу граничных условий, как для ТЕ-, так и для ТМ-волн. Таким образом, в волноводе с проводящими стенками:

$$\int (\nabla_{\perp} \psi)^2 da + \int \psi \Delta_{\perp} \psi da = 0 \quad (2.26)$$

Возьмем уравнение (2.1) для поперечной составляющей потенциала:

$$\Delta_{\perp} \psi + \kappa_a^2 \psi = 0$$

Умножим его скалярно на ψ и проинтегрируем по поперечному сечению:

$$\int \psi \Delta_{\perp} \psi da = -\kappa_a^2 \int \psi^2 da \quad (2.27)$$

Подставив (2.27) в (2.26), получим:

$$\int (\Delta_{\perp} \psi)^2 da = \kappa_a^2 \int \psi^2 da$$

С учетом этого соотношения имеем:

$$\langle W_m \rangle = \frac{1}{4} \mu \mu_0 \kappa_a^2 (\kappa_a^2 + \gamma^2) \int \psi^2 da$$

В то же время имеем:

$$\langle W_e \rangle = \frac{1}{4} \mu \mu_0^2 k^2 \epsilon \epsilon_0 \kappa_a^2 \int \psi^2 da$$

Приняв во внимание тождество (2.3), убеждаемся в том, что для электрического и магнитного полей в волноводе выполняется «принцип равнораспределения» = плотности энергии, запасенной в электрическом и магнитном поле, одинаковы:

$$\langle W_e \rangle = \langle W_m \rangle \quad (2.28)$$

Кроме того, поскольку:

$$\langle S \rangle = \frac{\mu \mu_0 k \gamma c}{2} \kappa_a^2 \int \psi^2 da$$

то, с учетом определения скорости переноса энергии v (3.8) и формулы (2.21), получим:

$$v_{\vartheta} = \frac{\langle S \rangle}{\langle W \rangle + \langle W_m \rangle} = \frac{\frac{\mu\mu_0 k \gamma}{8\pi} \kappa_a^2 \int \psi^2 da}{\frac{1}{8\pi} \mu\mu_0^2 k^2 \varepsilon \varepsilon_0 \kappa_a^2 \int \psi^2 da} = \frac{\gamma}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon \mu}} \left(1 - \frac{\omega_{\text{кр}}^2 a}{\omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

Таким образом, для ТЕ-волн произвольного поперечно-однородного волновода строго доказано, что скорость переноса энергии в волноводе совпадает с групповой скоростью. В случае ТМ-волн выражения для $\langle W \rangle$ и $\langle S \rangle$ получаются несколько иными:

$$\langle S \rangle = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \kappa \gamma c}{8\pi} \kappa_a^2 \int \psi^2 da$$

$$\langle W \rangle = \frac{1}{8\pi} \varepsilon \varepsilon_0^2 \mu \mu_0 k^2 \int \psi^2 da$$

Однако принципиальный вывод о равенстве $v_{\vartheta} = v_{\text{гр}}$ и схема его доказательства остаются в силе.

3. ТЕМ ВОЛНЫ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

Среди поперечно-однородных волноводов имеются структуры, в которых одно из собственных чисел краевой задачи для поперечной волновой функции обращается в нуль, $\kappa_0^2 = 0$. Этот частный случай заслуживает отдельного внимания. Ему отвечают волны, обладающие специфическими, важными для практики свойствами. Их первой отличительной особенностью являются отсутствие продольных компонент электромагнитного поля (см. (2.4) и (2.5)); волны являются чисто поперечными. Для такого типа волн принято обозначение ТЕМ (transversal electromagnetic). Вторая особенность этих волн состоит в отсутствии у них структурной дисперсии, при $\kappa_0 = 0$ фазовая скорость не зависит от частоты. Действительно, из (2.20) и (2.19) следует:

$$v_\Phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (3.1)$$

Уравнение поперечной волновой функции (2.1) сводится для волны ТЕМ к двумерному уравнению Лапласа

$$\Delta_\perp \psi = 0 \quad (3.2)$$

Функция ψ для волн типа ТЕМ может иметь различный смысл, в зависимости от того, считать ли отправной точкой соотношения для ТЕ или для ТМ волн, ((2.4) или (2.5)). Если рассматривать ТЕМ-волну как частный случай ТЕ-волны, то можно показать, что ψ – это векторный потенциал соответствующей магнитостатической задачи, который имеет в этом случае одну z -компоненту. При этом краевой задаче для функции ψ отвечает граничное условие (2.13). Приведем здесь его еще раз:

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_2} = 0 \quad (\text{при } q_2 = C)$$

Если рассматривать ТЕМ-волну как частный случай ТМ-волны, то ψ представляет собой просто электростатический потенциал, а компоненты

поля E пропорциональны компонентам $\text{grad } \psi$ (см. (2.5)). При этом краевой задаче для функции ψ отвечает граничное условие типа (2.15), которое следует несколько видоизменить. Действительно, равенство нулю продольной компоненты электрического поля E_z достигается для ТЕМ-волн автоматически, значит граничное условие для ТМ волн можно смягчить потребовав не $\psi = 0$, а:

$$\psi = \text{const.} \quad (\text{при } q_2 = C) \quad (3.3)$$

Из электростатики известно, что если граница некоторой области пространства является связной эквипотенциальной поверхностью, то в этой области поле (описываемое уравнением Лапласа) отсутствует. Математическим выражением этого свойства является принцип максимума, также известный из курса уравнений математической физики [9]. Согласно ему, решение краевой задачи для уравнения Лапласа может достигать экстремальных значений только на границе рассматриваемой области. Если же потенциал ψ на всей границе имеет одно постоянное значение, то и внутри области он постоянен, а значит, поле в этой области отсутствует.

Однако из той же электростатики известно, что если граница области, занимаемой полем, является многосвязной, то электрическое поле в такой области может существовать. В общем случае, если граница состоит из n связных частей, то потенциал на одной из поверхностей (проводников) можно приравнять нулю, а потенциалы остальных проводников задавать независимо. Соответственно, в n -проводной линии может распространяться $(n - 1)$ различных волн типа ТЕМ.

Рассмотрим в качестве примера распределение поля волны ТЕМ в волноведущей линии, состоящей из двух коаксиально расположенных цилиндрических проводников – внутреннего, радиусом r_1 , и внешнего, радиусом r_2 (рис. 3.1)

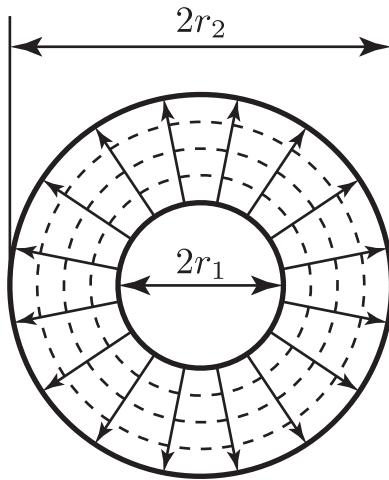


Рис. 3.1. Распределение полей волны ТЕМ в коаксиальной линии. Непрерывные стрелки – линии электрического поля, пунктирные линии – магнитного.

Уравнение Лапласа (3.2) в цилиндрических координатах примет вид:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = 0$$

Как известно, цилиндрически симметричным решением последнего уравнения является функция

$$\psi = A \ln \frac{1}{r} + A_0. \quad (3.4)$$

Константы A и A_0 легко найти, потребовав, чтобы выполнялось условие на поверхности внутреннего проводника:

$$\psi = \text{const} = \Psi_1 \quad (\text{при } r = r_1),$$

и на поверхности внешнего проводника:

$$\psi = \text{const} = \Psi_2 \quad (\text{при } r = r_2).$$

Полагая, что для ψ справедливо (3.4), и взяв для бегущей волны $\zeta = e^{i\gamma z}$,

найдем из формул (2.4) следующие выражения компонент полей:

$$\begin{aligned}
 E_r &= \frac{-i\gamma A}{r} e^{i\gamma z}, & H_r &= 0, \\
 E_\varphi &= 0, & H_\varphi &= \frac{-i\omega\epsilon\epsilon_0 A}{r} e^{i\gamma z}, \\
 E_z &= 0, & H_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Таким образом, волна ТЕМ коаксиальной линии имеет лишь две отличные от нуля компоненты, E_r и H_φ . Линии электрического и магнитного полей отображены на рис. 3.1.

Вернемся к общему случаю ТЕМ волн. При исследовании направляющих систем с волнами ТЕМ часто исходят не из уравнений Максвелла, а из телеграфных уравнений. Волну при этом характеризуют не распределением электрического и магнитного полей, а следующими величинами: напряжением между проводниками $U(z, t)$ и протекающим через сечение одного из проводников током $I(z, t)$, погонной индуктивностью L и погонной емкостью C .

Телеграфные уравнения являются следствием уравнений Максвелла. Подробное обоснование этого положения проведено в лекциях академика Л.И. Мандельштама по теории колебаний [10]. Однако в литературе встречаются и спорные (или неудачно сформулированные) утверждения о том, что телеграфные уравнения не сводятся к уравнениям Максвелла [2]. Поэтому будет полезным проследить, как от уравнений Максвелла (записанных для полей) можно перейти к уравнениям для напряжения и тока, и обсудить целесообразность такого перехода.

Рассмотрим длинную линию из двух проводников. Для начала найдем токи, текущие через оба проводника. Для этого проинтегрируем \mathbf{H} по контуру, охватывающим сначала один проводник, затем оба проводника и вычтем первый ток. Пусть, для примера, линия также будет коаксиальной, хотя подобное можно проделать для любой двухпроводной линии.

Связь между напряженностью электрического поля \mathbf{E} полным зарядом $\Delta q_{\text{полн}}$ в некотором объеме, ограниченным поверхностью S_1 дается теоремой Остроградского-Гаусса:

$$\int_{S_1} \mathbf{E} d\mathbf{S} = \frac{\Delta q_{\text{полн}}}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (3.6)$$

где предполагается, что поверхность S_1 , охватывает часть одного из проводов. Перейдем к погонному заряду q , то есть на единицу длины.

$$q = \frac{\Delta q_{\text{полн}}}{\Delta z}, \quad (3.7)$$

В этом случае в формуле (3.6) в качестве объема интегрирования достаточно выбрать цилиндр, охватывающий провод, единичной длины. Тогда поверхностный интеграл преобразуется в криволинейный:

$$\oint_l E_n dl = \frac{q}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (3.8)$$

где интегрирование ведется в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, по контуру, охватывающем проводник, а E_n – внешняя нормаль к этому контуру, лежащая также в этой плоскости.

Связь между силой тока I и напряженностью магнитного поля \mathbf{H} в общем случае определяется уравнением Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (3.9)$$

Заметим, что в уравнении для потенциала (3.2) отсутствуют производные по времени, или (что тоже самое) члены, содержащие ω . Следовательно в поперечном сечении задача является квазистатическая. Следовательно производную по времени можно считать равной нулю, и уравнение (3.9) преобразуется к виду:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}, \quad (3.10)$$

В интегральной форме это уравнение будет выглядеть следующим образом:

$$\oint_l \mathbf{H} dl = I, \quad (3.11)$$

где интегрирование ведется по контуру, охватывающим проводник, в котором определяем ток. Также как и в случае с электрическим полем, будем предполагать, что контур l лежит в поперечной плоскости.

Пусть нам известно распределение потенциала для ТЕ волн $\psi_0(q_1, q_2)$, который соответствует единичной погонной плотности заряда. Тогда согласно выражению для компонент полей (2.4) поперечные компоненты электрического поля имеют вид:

$$E_{01} = \frac{i\omega\mu\mu_0}{h_2} \frac{\partial\psi_0}{\partial q_2} \zeta, \quad E_{02} = -\frac{i\omega\mu\mu_0}{h_1} \frac{\partial\psi_0}{\partial q_1} \zeta \quad (3.12)$$

Наша цель – рассмотреть не статическую, а динамическую задачу, но при этом учесть, что поперечная конфигурация поля подобна статической. Это значит, что электрическое поле распределено по закону:

$$\mathbf{E} = q(z, t)\mathbf{E}_0(q_1, q_2). \quad (3.13)$$

Аналогично для магнитного поля:

$$\mathbf{H} = I(z, t)\mathbf{H}_0(q_1, q_2). \quad (3.14)$$

где электрическое поле \mathbf{E}_0 – это поле, создаваемое статическим распределением заряда с погонной плотностью, равной единице, а \mathbf{H}_0 – распределение магнитного поля, создаваемое при протекании единичного тока. Поле \mathbf{E}_0 выражается через производные функции ψ_0 посредством (3.12), а для поля \mathbf{H}_0 таких выражений пока нет.

Компоненты полей \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 пропорциональны друг другу. Рассматривая (2.11), убедимся, что

$$\frac{E_1}{H_2} = -\frac{E_2}{H_1} = Z_x \quad (3.15)$$

где Z_{x0} – характеристическое сопротивление, соответствующее коэффициенту $\kappa = 0$, а следовательно и $\omega_{kpa} = 0$ (см. (2.19), (2.24) и (2.25)).

$$Z_{x0} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \quad (3.16)$$

Такое же характеристическое сопротивление будет для плоской волны в отсутствии волноведущих поверхностей. Поскольку дисперсия отсутствует, соотношение (3.15) справедливо для любой зависимости характеристик волны от времени. Однако мы не можем гарантировать, что из (3.15) и равенства $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ следует, что соответствующий ток (который входит в выражение для магнитного поля (3.14)) равен единице. Поэтому запишем условие пропорциональности электрического и магнитного полей в более общем виде:

$$H_{01} = -\frac{a}{Z_{x0}} E_{02}, \quad H_{02} = \frac{a}{Z_{x0}} E_{01} \quad (3.17)$$

Значения $\text{rot } \mathbf{H}$ и $\text{rot } \mathbf{E}$ запишем в декартовых координатах для краткости записи:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 I H_{01} & h_2 I H_{02} & h_3 I H_{02} \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \frac{\partial I}{\partial z} H_{0y} + \mathbf{j} \frac{\partial I}{\partial z} H_{0x} + \mathbf{k} I \left(\frac{\partial H_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial H_{0x}}{\partial y} \right) \\ \text{rot } \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 q E_{01} & h_2 q E_{02} & h_3 q E_{02} \end{vmatrix} = -\mathbf{i} \frac{\partial q}{\partial z} E_{0y} + \mathbf{j} \frac{\partial q}{\partial z} E_{0x} + \mathbf{k} q \left(\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial E_{0x}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Перепишем выражения для роторов с учетом представления (3.13) и (3.14), и того, что из (2.4) и (2.5) следует

$$\frac{\partial H_{0y}}{\partial x} = \frac{\partial H_{0x}}{\partial y}, \quad \frac{\partial E_{0y}}{\partial x} = \frac{\partial E_{0x}}{\partial y}.$$

Будем иметь:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= -\mathbf{i} \frac{\partial I}{\partial z} H_{0y} + \mathbf{j} \frac{\partial I}{\partial z} H_{0x} + \mathbf{k} \cdot 0 = (-\mathbf{i} a Y E_{0x} - \mathbf{j} a Y E_{0y}) \frac{\partial I}{\partial z} = -a Y \mathbf{E}_0 \frac{\partial I}{\partial z} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mathbf{i} \frac{\partial q}{\partial z} E_{0y} + \mathbf{j} \frac{\partial q}{\partial z} E_{0x} + \mathbf{k} \cdot 0 = \left(\frac{\mathbf{i}}{Y a} H_{0x} + \frac{\mathbf{j}}{Y a} H_{0y} \right) \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{1}{Y a} \mathbf{H}_0 \frac{\partial q}{\partial z}\end{aligned}$$

В результате подстановки данных выражений в уравнения Максвелла (1.6) получим:

$$\begin{aligned}-caY E_0 \frac{\partial I}{\partial z} &= \varepsilon E_0 \frac{\partial q}{\partial t} \\ c \frac{1}{Y a} H_0 \frac{\partial q}{\partial z} &= -\mu H_0 \frac{\partial I}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.18}$$

Если положить $\varepsilon = caY$, то первое из уравнений (3.18) сводится к закону сохранения заряда:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}\tag{3.19}$$

Тогда же второе уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{c^2}{\varepsilon \mu} \frac{\partial q}{\partial z}.\tag{3.20}$$

Таким образом, вместо уравнений для поля, мы получили уравнения для тока и плотности заряда, которые пока не содержат квазистатических величин, типа погонной емкости и погонной индуктивности. Часто уравнения (3.19), (3.20) представляют в другой форме.

Для этого вводят электрическое напряжение, которое есть интеграл от поля, взятый между проводниками в фиксированном поперечном сечении:

$$U = \int_{l_{\perp}} \mathbf{E} d\mathbf{l},\tag{3.21}$$

где путь интегрирования l_{\perp} лежит в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения. При таком выборе пути интегрирования величина U аналогична разности потенциалов в электростатике и пропорциональна погонной плотности заряда:

$$q = CU.\tag{3.22}$$

Погонную емкость C можно определить следующим образом:

$$C = \frac{q}{\int_{l_{\perp}} \mathbf{E} d\mathbf{l}} = \frac{1}{\int_{l_{\perp}} \mathbf{E}_0 d\mathbf{l}}. \quad (3.23)$$

С учетом (3.22) и (3.23) уравнения (3.19) и (3.20) приобретают вид:

$$\begin{aligned} C \frac{\partial U}{\partial t} &= - \frac{\partial I}{\partial z} \\ L \frac{\partial I}{\partial t} &= - \frac{\partial U}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь введен еще один коэффициент, погонная индуктивность L . Обычно индуктивность определяют с помощью вычисления потока магнитного поля, создаваемого единичным током. В нашем выводе телеграфных уравнений рассматривался только потенциал $\psi_0(x, y)$, для электростатической задачи, и не принималась во внимание аналогичная функция для магнитостатической задачи. Вследствие такого «лентяйского подхода» при переходе от уравнений (3.19), (3.20) к (3.24) следует определить погонную индуктивность следующим образом:

$$L = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \int_{l_{\perp}} \mathbf{E}_0 d\mathbf{l} \quad (3.25)$$

При таком определении из (3.23) и (3.25) имеем:

$$LC = \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \quad (3.26)$$

Формула (3.25) не имеет глубокого физического смысла, однако для систем с волнами ТЕМ она оказывается не только верной, но и удобной. Уравнения (3.24) называются телеграфными уравнениями. Как доказано выше, телеграфные уравнения являются следствием уравнений Максвелла для волн ТЕМ, которые имеют место в поперечно-однородном волноводе с многосвязной проводящей границей. При этом вовсе не обязательно, чтобы поперечные размеры волновода были малыми по сравнению с длиной волны.

3. Свойства линий передачи волн типа ТЕМ определяют два параметра: скорость распространения волн и характеристический импеданс. В ТЕМ-системах с малыми потерями можно пренебречь дисперсией, и фазовые скорости волн с разными частотами практически одинаковы, $v_\phi = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, (3.1). Такую же величину имеет групповая скорость. Можно определить фазовую скорость и иначе, через погонные параметры линии. Как следует из (3.26):

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (3.27)$$

Рассмотрим гармонические колебания, для этого представим решения U и I в виде бегущих в положительном направлении Oz волн:

$$\begin{pmatrix} U \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_+ \\ I_+ \end{pmatrix} \exp[i(\gamma z - \omega t)].$$

Подстановка их в телеграфные уравнения (3.24) дает:

$$\begin{aligned} C(-i\omega)U_+ &= -i\gamma I_+, \\ L(-i\omega)I_+ &= -i\gamma U_+, \end{aligned} \quad (3.28)$$

Волновое сопротивление линии передачи ρ определяется как отношение амплитуд напряжения и тока в бегущей волне, распространяющейся в этой линии.

$$\rho = \frac{U_+}{I_+}. \quad (3.29)$$

Из уравнений (3.28) находим два представления для волнового сопротивления:

$$\rho = \frac{U_+}{I_+} = \frac{\gamma}{\omega C} = \frac{1}{v_\phi C} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{\omega L}{\gamma} = v_\phi L. \quad (3.30)$$

Комбинируя их, получим формулу:

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (3.31)$$

Понятия волнового сопротивления ρ и характеристического сопротивления Z_x определяются по-разному, и их не следует смешивать.

Вычислим для примера волновое сопротивление коаксиальной линии. Вначале найдем погонную емкость. Эта задача хорошо известна из курса электричества. Поле в цилиндрическом конденсаторе распределено по закону: $E_r = \frac{A}{r}$. Найдем константу A . По определению, величине E_{0r} соответствует погонная плотность заряда $q = 1$. Воспользуемся (3.8)

$$\oint \frac{A}{r} dl = \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0},$$

где $dS = rd\varphi$ - элемент боковой поверхности внутреннего проводника, отсюда следует $A = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}$. Тогда можем вычислить интеграл, присутствующий в формуле (3.23) для погонной емкости:

$$\int_{r_1}^{r_2} E_0 dl = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Таким образом получаем:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (3.32)$$

В данном случае нет нужды специально рассматривать магнитостатическую задачу, чтобы вычислить погонную индуктивность, поскольку из (3.26) следует

$$L = \frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (3.33)$$

и с помощью (3.30) окончательно находим:

$$\rho = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (3.34)$$

Сравнивая (3.16) и (3.34), видим, что характеристический импеданс не зависит от геометрических параметров волновода, а волновой импеданс – зависит. Более того, в системе СГС волновой и характеристический

импедансы ρ и Z_x имеют даже разную размерность. В системе СИ обе величины измеряются в омах.

Коаксиальные линии очень широко используются для передачи электромагнитных волн в диапазоне от сверхнизких частот вплоть до границы миллиметрового диапазона. Принципиальным ограничением для их применения на более высоких частотах является возбуждение в коаксиальной линии волн других типов, с $\kappa^2 > 0$ (это не ТЕМ, а ТЕ или ТМ волны). В тех случаях, когда целесообразно использовать двух- или многопроводные линии более сложной конфигурации, удобным способом расчета их погонной емкости является метод конформных отображений. Впрочем, необходимость в расчете может и не возникнуть, если известна экспериментально измеренная емкость отрезка соответствующей линии единичной длины.

4. При переходе от уравнений Максвелла к телеграфным уравнениям, справедливым для ТЕМ-волн, мы вместо переменных, описывающих поле, используем переменные, описывающие его источники. Эти источники (заряды и токи) сами находятся за пределами области существования поля – на проводниках. В чем выгода и удобство такого квазистатического подхода? Прежде всего, в том, что квазистатический подход как бы “экономит” при описании волновых процессов два пространственных измерения. Вместо того, чтобы искать поперечную конфигурацию электромагнитного поля в однородной линии, достаточно знать одну её геометрическую характеристику – погонную емкость. Погонная индуктивность в системе с волнами ТЕМ по сути дела может быть выражена через погонную емкость.

С целью расширения области применения удобного аппарата телеграфных уравнений, были предприняты многочисленные обобщения. Показано, что во многих случаях телеграфные уравнения приближенно верны и в системах, неоднородных в продольном направлении (вдоль оси z).

Это прежде всего случай слабой неоднородности, когда можно считать, что геометрические или/и материальные параметры направляющей системы мало меняются на расстоянии порядка длины волны, и структура поля остается практически такой же, как и в регулярной (продольно однородной) линии передачи, то есть – ТЕМ. Второй случай – резкого, скачкообразного изменения какого-либо параметра системы в определенном сечении $z = \text{const}$. При этом части линии передачи, лежащие по обе стороны сечения скачка, являются однородными. Соответственно и волны, которые распространяются в обеих частях системы, принадлежат к семейству ТЕМ. Особой областью оказывается близкая окрестность плоскости скачка, где происходит преобразование структуры электромагнитного поля.

В тех случаях, когда размеры области неоднородности в «почти» ТЕМ системах малы по сравнению с длиной волны, их влияние представляют, вводя эквивалентные сосредоточенные элементы. И в этом отношении телеграфные уравнения также дают существенные удобства. Далее, телеграфные уравнения можно распространить на системы с потерями и даже на нелинейные системы. Однако следует отметить, что многие из таких обобщений являются приближенными и не имеют достаточно строгого обоснования.

Телеграфные уравнения были положены в основу теории цепей СВЧ, область применения которой чрезвычайно широка, и включает теорию радиоизмерений, расчет фильтров и других устройств [11–14].

4. КВАЗИПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ

Следует подчеркнуть, что поперечные электромагнитные волны (TEM) возможны только в таких направляющих системах, которые по всему сечению заполнены однородным веществом. Действительно, положим обратное: в некотором регулярном волноводе, состоящем из частей с разными значениями проницаемостей, распространяется волна TEM. Поскольку для этой волны $\kappa \equiv 0$, то в разных частях поперечного сечения должно быть:

$$\varepsilon_i \mu_i k^2 = \gamma^2,$$

где i – номер диэлектрической области в сечении волновода. Но величины γ и k для данной моды постоянны во всех точках регулярного волновода. Поэтому последнее равенство выполняется только тогда, когда все произведения $n_i^2 = \varepsilon_i \mu_i$ (или, все показатели преломления) одинаковы. Если же материальные параметры сред не удовлетворяют этому требованию, то в направляющей системе для любой моды поперечное волновое число будет отлично от нуля. Как следствие, напряженность электрического или магнитного поля (или обе эти величины) имеет продольную компоненту во всех средах, составляющих волновод, а рассматриваемая волна не относится к семейству TEM.

Тем не менее, в ряде случаев в волноводах имеются моды, у которых продольные компоненты поля много меньше по величине, чем поперечные. Оценим условия существования таких, квази-TEM, типов волн. Для электрического поля отношение продольной и поперечной компонент имеет тот же порядок величины, что и у волн семейства TM. Используя (2.5), находим:

$$E_z \sim \kappa^2 \psi \zeta, \quad E_{q_1, q_2} \sim \frac{\partial \psi}{\partial (q_1, q_2)} \gamma \zeta \sim \frac{\psi}{d} \gamma \zeta,$$

где d – характерный поперечный размер волновода. Таким образом, для

соответствия волны критерию квази-TEM ($|E_z| \ll |E_{q_1, q_2}|$) должно быть выполнено неравенство:

$$\varkappa^2 \ll \gamma/d \quad (4.1)$$

Согласно (2.3) заведомо имеем: $\varkappa^2 < k^2$. Если будем требовать $k^2 \ll \gamma/d$, то условие квази-TEM волны (4.1) будет с запасом выполнено. Учтем теперь, что $k^2 = (2\pi/\lambda)^2$, а $\gamma = 2\pi/\lambda_{\text{в}}$, где λ – длина плоской однородной волны в диэлектрике, а $\lambda_{\text{в}}$ – длина волны в волноводе. Тогда получим достаточное условие квази-TEM волны в виде:

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\text{в}} d} \gg \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2. \quad (4.2)$$

Длины волн λ и $\lambda_{\text{в}}$ – величины одного порядка (обычно $\lambda_{\text{в}} > \lambda$). Это позволяет в качестве критерия квази-TEM волны использовать упрощенное условие:

$$\lambda \gg 2\pi d. \quad (4.3)$$

Таким образом, если данная мода способна распространяться в направляющей системе на низких частотах, где ее длина много больше поперечного размера направляющей системы, то в этих условиях волну можно считать квазипоперечной (квази-TEM). Из проведенного выше анализа следует, что микрополосковые, щелевые и другие планарные линии передачи (рис. 2.1, 7–9) не являются системами с волнами типа TEM. Тем не менее, поскольку эти системы допускают статические решения уравнений Максвелла, а значит, и возбуждение на низких частотах, можно ожидать, что эти низкочастотные волны будут относиться к типу квази-TEM. Как следствие, пока длина волны велика по сравнению с поперечными размерами этих систем, для их описания можно пользоваться телеграфными уравнениями и всеми связанными с ними понятиями.

Определение погонных параметров для квази-TEM систем продемонстрируем на примере коаксиальной линии с неоднородным заполнением (рис. 4.1), в которой сектор с углом раскрыва $2\pi\theta$ заполнен материалом с

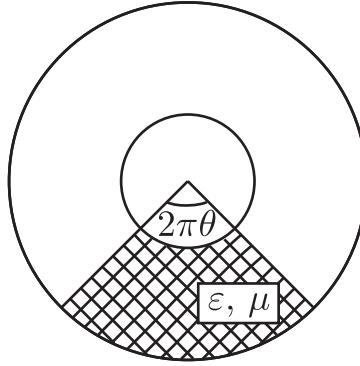


Рис. 4.1. Пример волновода с волной типа «квази-TEM»: коаксиальная линия с неоднородным диэлектрическим заполнением.

проницаемостью ϵ , а вне этого сектора диэлектрическая проницаемость равна единице, при этом во всем сечении волновода $\mu \equiv 1$. Так как внесение диэлектрика не ведет к перераспределению статического магнитного поля, погонная индуктивность остается той же, что и в незаполненной коаксиальной линии. Погонную емкость можно представить как сумму емкостей сектора, заполненного диэлектриком, $C_1 = \theta 2\pi\epsilon\epsilon_0 / \ln \frac{r_2}{r_1}$ и незаполненной части, $C_0 = (1 - \theta)2\pi\epsilon_0 / \ln \frac{r_2}{r_1}$. Таким образом, по сравнению с однородной незаполненной коаксиальной линией погонная емкость увеличивается в $(1 - \theta + \theta\epsilon)$ раз, а скорость распространения волны оказывается в $(1 - \theta + \theta\epsilon)^{1/2}$ раз меньше.

Попытаемся обобщить данный подход, описанный в [2] для частной конфигурации рис. 4.1. Рассмотрим однородный волновод, ограниченный двусвязной металлической поверхностью, в поперечном сечении которого имеются области, где материальные параметры принимают одно из двух значений: (ϵ_1, μ_1) или (ϵ_2, μ_2) , аналогично рис. 4.1. Определим скорость переноса энергии v , используя формулу (3.8), которую с учетом (3.11) можно взять в виде $v = \langle S \rangle / 2 \langle W_e \rangle$. Запишем выражения для

$\langle W_e \rangle$ и $\langle S \rangle$ в таком же виде, как в §1.3 для ТЕ-волн:

$$\langle W_e \rangle = \langle W_1 \rangle + \langle W_2 \rangle = \frac{\varepsilon_1 \mu_1^2}{16\pi} k^2 \kappa_1^2 I_1 + \frac{\varepsilon_2 \mu_2^2}{16\pi} k^2 \kappa_2^2 I_2,$$

$$\langle S \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle = \frac{\mu_1 k \gamma c}{8\pi} \kappa_1^2 I_1 + \frac{\mu_2 k \gamma c}{8\pi} \kappa_2^2 I_2,$$

где $I_1 = \int_{A_1} \psi^2 da$, $I_2 = \int_{A_2} \psi^2 da$, или

$$\langle W_e \rangle = \langle W_1 \rangle + \langle W_2 \rangle = \frac{k^2}{16\pi} \varepsilon_1 \mu_1^2 \kappa_1^2 I_1 \left(1 + \frac{\varepsilon_2 \mu_2^2 \kappa_2^2 I_2}{\varepsilon_1 \mu_1^2 \kappa_1^2 I_1} \right) =$$

$$= \frac{k^2}{16\pi} \varepsilon_1 \mu_1^2 \kappa_1^2 I_1 (1 + r_w)$$

$$\langle S \rangle = \langle S_1 \rangle + \langle S_2 \rangle = \mu_1 \frac{k \gamma c}{8\pi} \kappa_1^2 I_1 \left(1 + \frac{\mu_2 \kappa_2^2 I_2}{\mu_1 \kappa_1^2 I_1} \right) =$$

$$= \mu_1 \frac{k \gamma c}{8\pi} \kappa_1^2 I_1 (1 + r_w r_n^{-2})$$

где $r_w = \varepsilon_2 \mu_2^2 \kappa_2^2 I_2 / (\varepsilon_1 \mu_1^2 \kappa_1^2 I_1)$ – отношение погонных плотностей энергии в двух частях волновода, и $r_n = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 / \varepsilon_1 \mu_1}$ – отношение показателей преломления в этих же частях. Подставив полученные выражения в формулу (3.8), найдем:

$$v_\vartheta = \frac{\gamma c}{k \varepsilon_1 \mu_1} \frac{1 + r_w r_n^{-2}}{1 + r_w} \quad (4.4)$$

С учетом определения фазовой скорости ($v = ck/\gamma$) последнее соотношение можно представить в виде

$$v_\vartheta v_\Phi = \frac{c^2}{\varepsilon_1 \mu_1} \frac{1 + r_w r_n^{-2}}{1 + r_w}$$

Для волн ТЕМ (квази-ТЕМ) при стремлении частоты к нулю фазовая и групповая скорости становятся одинаковыми, следовательно, из последнего уравнения получим:

$$v_\Phi(\omega \rightarrow 0) = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}} \sqrt{\frac{1 + r_w r_n^{-2}}{1 + r_w}} \quad (4.5)$$

Формулы (4.4) и (4.5) оказываются полезными, если отношение энергий r_w каким-либо образом известно. Для рассмотренного выше коаксиального волновода с неоднородным диэлектрическим заполнением это

отношение можно определить, зная электростатическое поле в структуре. В данном случае отношение погонных плотностей энергии равно отношению погонных емкостей, то есть $r_w = \theta\varepsilon/(1 - \theta)$. Отношение показателей преломления $r_n = \sqrt{\varepsilon}$. Поэтому, согласно (4.5) находим:

$$v_\Phi(\omega \rightarrow 0) = c \sqrt{\frac{1 + \theta/(1 - \theta)}{1 + \theta\varepsilon/(1 - \theta)}} = c \sqrt{\frac{1 - \theta + \theta}{1 - \theta + \theta\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \theta + \theta\varepsilon}}.$$

Это в точности совпадает с результатами упрощенного исследования.

Данное выше обоснование формул (4.4) и (4.5) корректно в случае, когда структура собственной квази-TEM волны сводится к полям семейства TE. Однако и в случае TM волн аналогичные выкладки приводят к тем же соотношениям. В реальных поперечно-неоднородных волноводах поля являются в общем случае гибридными. Для этого общего случая строгий вывод формул (4.4) и (4.5) сопряжен с математическими трудностями. Тем не менее, подобные формулы широко используются при расчете параметров микрополосковых линий и родственных им планарных структур [15].

В заключение отметим, что критерий квази-TEM волны может быть выполнен не только для мод, существующих в пределе низких частот, но и в противоположном предельном случае, если при росте частоты (в пределе, $\omega \rightarrow \infty$) поперечные волновые числа остаются ограниченными. Такого рода ситуации возможны в диэлектрических волноводах (см. § 1.8, § 1.11).

5. ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

1. Прямоугольный волновод является простейшей направляющей системой, где все собственные волны принадлежат к семействам ТЕ и ТМ. Анализ прямоугольного волновода удобно проводить в декартовых прямоугольных координатах (рис. 5.1). Обратим внимание, что в принятых нами обозначениях оси координат сдвинуты относительно оси симметрии системы.

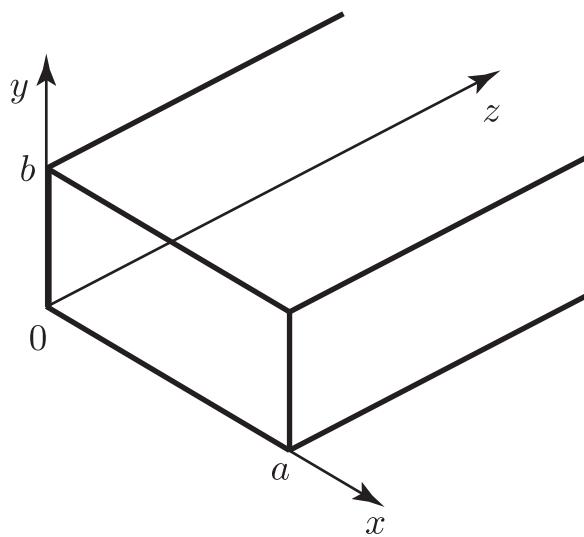


Рис. 5.1. Полый прямоугольный волновод: геометрия задачи.

Уравнение (2.1) для поперечной волновой функции имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \kappa^2 \psi = 0 \quad (5.1)$$

Границные условия задаются на стенках волновода, то есть на плоских поверхностях $x = 0$ и $x = a$ (боковые стенки), и $y = 0$, $y = b$ (нижняя и верхняя стенки). Для ТМ-волн граничные условия являются условиями первого рода:

$$\psi = 0 \quad \text{при } x = 0, x = a \text{ и } y = 0, y = b. \quad (5.2)$$

Для ТЕ-волн граничные условия есть:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial x} &= 0 && \text{при } x = 0 \text{ и } x = a, \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= 0 && \text{при } y = 0 \text{ и } y = b.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Здесь граница волновода состоит из частей, лежащих на разных координатных поверхностях. Такой выбор не препятствует решению краевой задачи методом разделения переменных.

Не составляет труда найти собственные функции ψ , удовлетворяющие уравнению Гельмгольца (5.1) и граничным условиям (5.2) и (5.3), а также соответствующие собственные значения. Для ТЕ-волн получаем:

$$\psi = A \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}, \quad \varkappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{5.4}$$

Аналогично, для ТМ-волн:

$$\psi = B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \varkappa_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2. \tag{5.5}$$

Здесь m и n – целые числа.

2. Рассмотрим волны, бегущие в положительном направлении оси z , то есть примем $\zeta(z) = e^{i\gamma z}$. Выражения для компонент полей ТЕ-волн получаем, подставив (5.4) в формулу (2.4):

$$\begin{aligned}E_x &= -i\omega\mu\mu_0 A \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\ E_y &= i\omega\mu\mu_0 A \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\ E_z &= 0, \\ H_x &= -i\gamma A \frac{m\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\ H_y &= -i\gamma A \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\ H_z &= A \varkappa_{mn}^2 \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Аналогично, подставив (5.5) в формулу (2.5), получаем для ТМ-волн:

$$\begin{aligned}
 E_x &= i\gamma B \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\
 E_y &= i\gamma B \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\
 E_z &= \kappa_{mn}^2 B \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\
 H_x &= -i\omega\epsilon\epsilon_0 B \frac{n\pi}{b} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\
 H_y &= i\omega\epsilon\epsilon_0 B \frac{m\pi}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\gamma z}, \\
 H_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Числа m и n равны числу полуволн, которые укладываются в волноводе вдоль осей x и y . Для задания моды волновода достаточно указать тип волны (ТЕ или ТМ) и пару индексов (m, n) , например TE_{11} , TM_{24} (в другой, эквивалентной форме записи: H_{11} , E_{24}). Очевидно, числа m и n принимают натуральные значения: $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Кроме того, в случае ТЕ мод один из индексов m, n может принимать значение, равное нулю. В этом нетрудно убедиться, рассматривая выражения для полей (5.6). Структура полей таких типов особенно проста: при $n = 0$ у них только три ненулевых компоненты, E_y, H_x, H_z . Распределения полей мод TE_{l0} и TE_{0l} качественно подобны (с точностью до переименования осей).

Среди волн типа ТМ не содержится мод TM_{l0} и TM_{0l} : полагая $m = 0$ или $n = 0$ в (5.7), получим поле, тождественно равное нулю.

В прямоугольном волноводе поля ТЕ- и ТМ-волн являются периодическими функциями координат x и y . Для того, чтобы представить картину поля любой собственной волны, достаточно иметь распределения полей для мод TE_{10} , TE_{11} и TM_{11} , и повторить их (с учетом перемен знака поля) столько раз, сколько полуволн укладывается вдоль осей x и y (то есть m и n раз соответственно). Картинны пространственного распределения силовых линий для мод прямоугольного волновода приведены на рисунке (5.2).

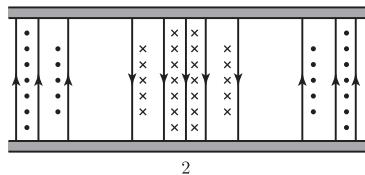
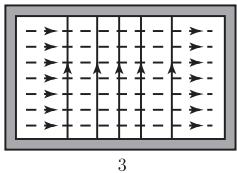
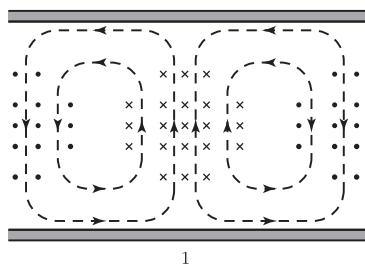
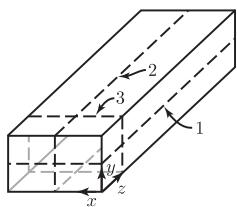
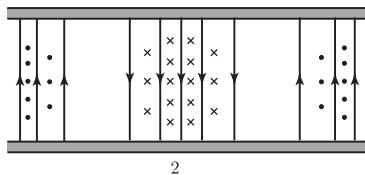
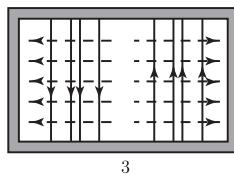
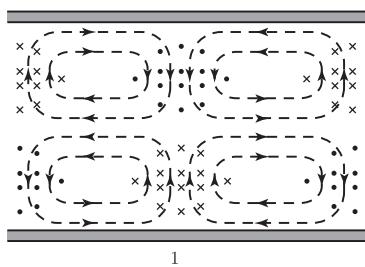
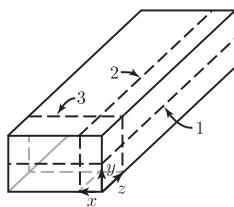
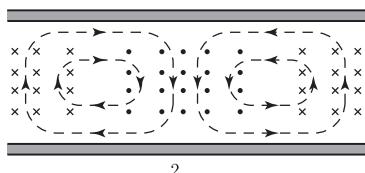
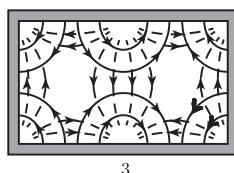
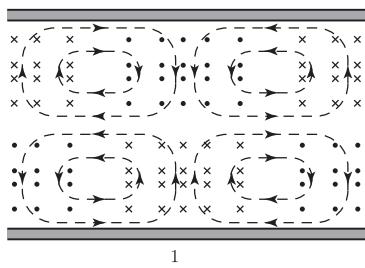
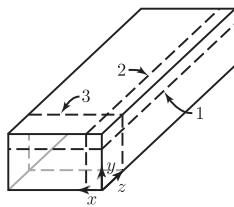
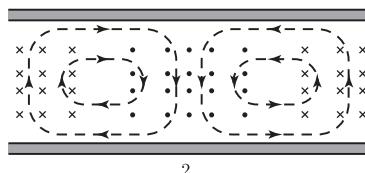
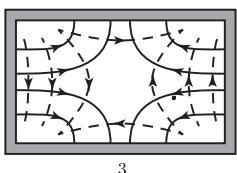
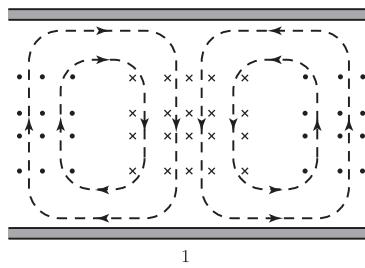
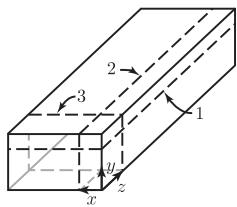
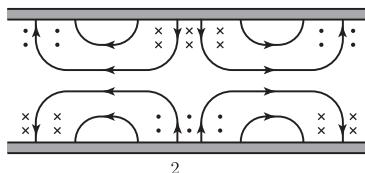
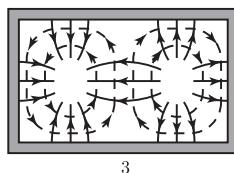
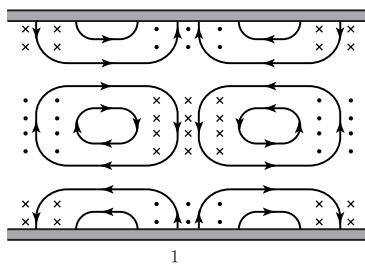
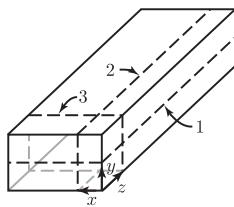
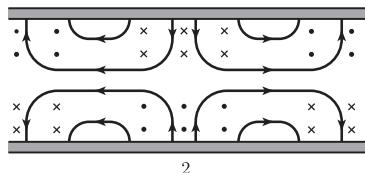
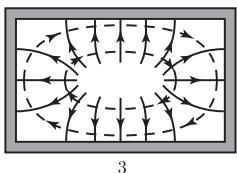
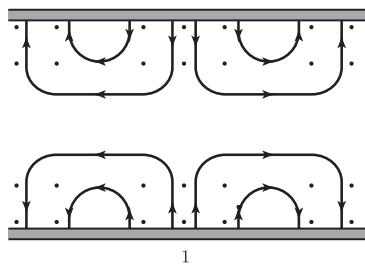
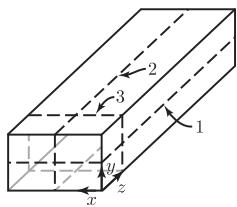
TE₁₀TE₂₀TE₁₁TM₁₁

Рис. 5.2. Моды прямоугольного волновода.

Как уже установлено при общем анализе в § 1.3, собственные волны прямоугольного волновода образуют полную ортогональную систему. Это в частности значит, что если в сечении $z = \text{const}$ задано произвольное электромагнитное поле, то его можно представить в виде разложения в ряд по собственным волнам типов TE (5.6) и TM (5.7).

3. Зная поперечные волновые числа, см. (5.4) и (5.5), можно найти критические частоты собственных волн прямоугольного волновода

$$\omega_{mn}^2 = \frac{c^2}{\varepsilon\mu} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (5.8)$$

Данная формула справедлива для моды с индексами m и n , принадлежащей как к семейству TE, так и TM. Часто интересуются не критической частотой, а критической длиной волны (приведенной к вакууму). В этом случае формулу (5.8) преобразуют к виду:

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_{mn}} \right)^2 = \frac{1}{\varepsilon\mu} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] \quad (5.9)$$

Прямоугольный волновод является поперечно-однородным, и для всех его мод имеет место универсальный волноводный закон дисперсии. Найдя критическую частоту моды, можно тем самым считать определенными и параметры дисперсионных зависимостей $\gamma(\omega)$ (2.18), $v_\phi(\omega)$ (2.20), и $v_{\text{гр}}(\omega)$ (2.21).

Моды, имеющие (при данной частоте) одинаковые постоянные распространения, но разные структуры полей, называются вырожденными. Эффект вырождения является характерной особенностью прямоугольного волновода. Действительно, все пары волн E_{mn} и H_{mn} , у которых пары индексов одинаковы, являются вырожденными при любых частотах. У вырожденных мод оба индекса не равны нулю.

Разложение полей по ортогональным модам в системе, содержащей вырожденные моды, является неоднозначным. Так, в качестве базисных мод можно брать не только TE и TM решения, но и их линейные ком-

бинации, подчинив последние некоторым дополнительным условиям. В качестве таких условий иногда устанавливают требования обращения в нуль одной из поперечных компонент поля. Подобные моды семейств LE (longitudinal electric – «продольные» электрические) и LM (longitudinal magnetic – «продольные» магнитные) используют в теории прямоугольных волноводов со вставками в виде плоских диэлектрических слоев [17].

Реально в волноводе всегда имеются регулярные и нерегулярные возмущения, которые приводят к снятию вырождения. В частности, уже учет малых потерь в стенках волновода приводит к тому, что в качестве нормальных мод такой возмущенной системы выступают линейные комбинации E_{mn} и H_{mn} , причем фазовая и групповая скорости каждой из возмущенных нормальных волн, а также их коэффициенты затухания заметно различаются вблизи критической частоты (более детально эта ситуация исследована в [18]). В системах передачи энергии и сигналов наличие мод, близких к вырождению, нежелательно, поскольку любое малое возмущение существенно влияет на постоянную распространения, в результате чего пространственная структура волн может неконтролируемым образом исказиться. Поэтому естественно стремление работать на невырожденных типах волн H_{m0} .

Более того, во многих случаях удобна работа в одноволновом режиме, когда по волноводу передаются частоты, лежащие в интервале, где условия распространения выполняются только для одной, основной моды (волны с наименьшей критической частотой). В одноволновом режиме, на достаточном расстоянии от источников поля структура распространяющейся волны одна и та же, каковы бы ни были эти источники. В прямоугольном волноводе основной является мода H_{10} . Если $b < a/2$, то следующую по величине критическую частоту имеет мода H_{20} , причем $\omega_{kp20} = 2\omega_{kp10}$. Интервал частот от ω_{kp10} до ω_{kp20} и будет областью одноволнового режима.

На практике приходится учитывать и другие соображения по выбору размеров волноводов, которые вытекают из требований передачи максимальной мощности, минимизации затухания на рабочей моде и увеличения затухания на высших типах волн (см. [8, 16]). 4. Воспользовавшись формулой Эйлера, можно в общем случае представить каждую из потенциальных функций, и соответственно каждое из полей мод (5.6) и (5.7), как сумму четырех бегущих плоских однородных волн вида:

$$\pm \frac{A}{4} \exp(i\Gamma_{\pm\pm}\mathbf{r}) = \pm \frac{A}{4} \exp(i\gamma z \pm i\frac{m\pi x}{a} \pm i\frac{n\pi y}{b}), \quad (5.10)$$

где вектор $\Gamma_{\pm\pm}$ имеет компоненты:

$$\Gamma_{\pm\pm} = \{i\gamma, \pm i\frac{m\pi}{a}, \pm i\frac{n\pi}{b}\}.$$

Будем называть волны (5.10) парциальными. Для каждой из них квадрат постоянной распространения равен:

$$\Gamma_{\pm\pm}^2 = \gamma^2 + \kappa_{mn}^2 = \varepsilon\mu k^2.$$

Таким образом, собственные волны прямоугольного волновода – это линейная комбинация плоских однородных волн, которые в веществе без дисперсии бегут со скоростью света

$$v_{\Phi} = v_{\text{гр}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

и преобразуются друг в друга, испытывая периодические отражения от стенок. При отражении плоской парциальной волны от идеально проводящей поверхности ее амплитуда не изменяется, фаза нормальной компоненты электрического поля также сохраняется, а фаза тангенциальной компоненты скачком изменяется на π («отражение с потерей полуволны»).

Для того, чтобы были выполнены граничные условия, каждая из парциальных плоских волн должна распространяться под углом θ к оси z .

Поскольку из (5.10) очевидно, что $\gamma = \Gamma \cos \theta$, где $\cos \theta = (\mathbf{\Gamma}_{\pm\pm} \mathbf{e}_z)$, имеем:

$$\cos \theta = \frac{\lambda}{\lambda_B} = \frac{\gamma}{\Gamma} = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon \mu} k} \quad (5.11)$$

или иначе, $\sin \theta = \kappa_{mn}/\Gamma$.

Чем ближе частота волны ω подходит к критической, тем меньше угол падения θ парциальной волны. Наконец, в критическом режиме волна падает нормально к поверхности и, отражаясь от противоположной плоскости, создает резонанс в поперечном направлении. Переноса энергии в направлении z не происходит. Запаздывание по фазе вдоль z отсутствует.

В случае мод типа H_{m0} число парциальных волн уменьшается до двух. При этом картина преобразования плоских волн в прямоугольном волноводе наиболее проста и наглядна (см. рис. 5.3). Так, фазовую ско-

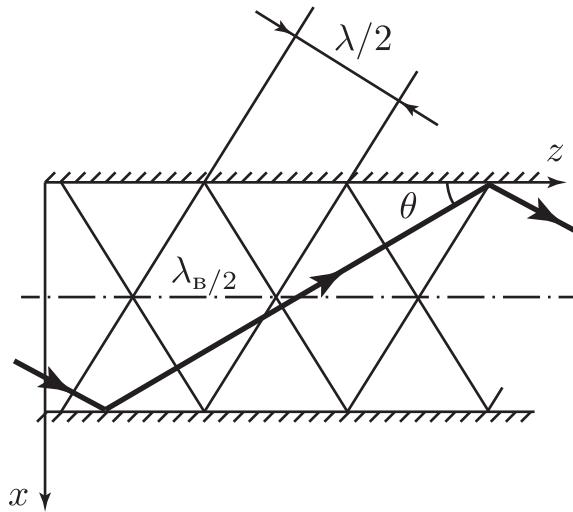


Рис. 5.3. К разложению собственной волны в прямоугольном волноводе по плоским волнам.

рость в данном случае легко определить как скорость движения вдоль оси z точки, где парциальная плоская волна имеет постоянную фазу. Как видно из рисунка, эта скорость равна:

$$v_\Phi = \frac{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}{\cos\theta} = \frac{ck}{\gamma},$$

что совпадает с (2.20). Распространение энергии в плоской однородной волне происходит по лучу – в направлении, перпендикулярном волновому фронту (поверхности постоянной фазы). Проекция лучевой скорости на ось z как раз равна групповой скорости:

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \cos\theta = \frac{c\gamma}{\varepsilon\mu k},$$

что совпадает с (2.21).

Разложение по плоским волнам помогает выяснить происхождение дисперсии и физический смысл формул для фазовой и групповой скорости в волноводе. В данном случае, причиной дисперсии является то, что процессы распространения парциальных волн происходят как в продольном, так и в поперечных направлениях.

При понижении частоты волны до соответствующего критического значения величина $\cos\theta$ стремится к нулю. При этом лучевая скорость уменьшается до нуля, то есть перенос энергии в направлении z прекращается. Фазовая скорость растет, и колебания в отрезке волновода приближаются к синфазным. Таким образом, бегущая

волна превращается в стоячую, а критическая частота оказывается частотой резонанса, на которой в поперечном сечении волновода укладывается целое число полуволн. Напротив, при увеличении частоты угол $\theta \rightarrow 0$, v_Φ и $v_{\text{гр}} \rightarrow c/\sqrt{\varepsilon\mu}$, как у однородной волны в безграничной среде.

6. ВОЛНЫ В КРУГЛОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим теперь другую конфигурацию волновода – в виде металлической трубы круглого сечения. Пусть электромагнитные волны распространяются в цилиндрической полости радиуса a (рис. 6.1). Запишем уравнение для поперечной потенциальной функции ψ (2.1) в полярных координатах: $q_1 = \varphi$, $q_2 = r$ ($h_1 = r$, $h_2 = 1$):

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \kappa^2 r \psi = 0 \quad (6.1)$$

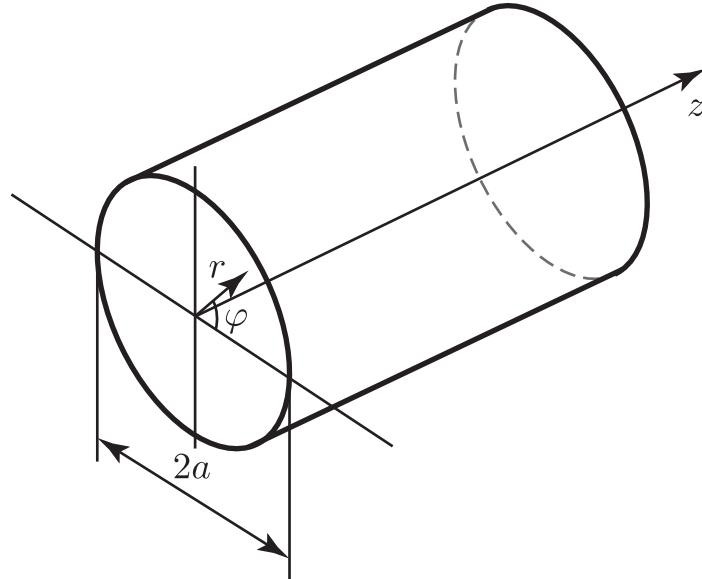


Рис. 6.1. Круглый волновод с металлическими стенками.

Границные условия для функции ψ также заданы, для ТЕ волн это (2.13), в случае круглого полновода они запишутся в виде:

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = 0, \quad (6.2)$$

и (2.15) для ТМ волн будут:

$$\psi|_{r=a} = 0. \quad (6.3)$$

Применим для решения уравнения (7.1) метод разделения переменных. Положим $\psi = \Phi(\varphi)R(r)$, получим:

$$r^{-1}R \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \Phi \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \kappa^2 r \Phi R = 0$$

или

$$\frac{1}{r^2} \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{Rr} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \kappa^2 = 0$$

В последнем уравнении возможно разделение зависимостей функций от разных координат, если положить

$$\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2 = \text{const},$$

или

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0. \quad (6.4)$$

Тогда для радиальной функции получим уравнение:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (6.5)$$

Уравнения (6.4) и (6.5) хорошо известны. Нетрудно найти их общие решения и выбрать из них те, которые удовлетворяют граничным условиям (6.2) и (6.3). Так, для угловой функции имеем:

$$\Phi_m = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi = C e^{im\varphi} + D e^{-im\varphi} \quad (6.6)$$

Поскольку напряженности электромагнитных полей – однозначные функции угловой координаты, то в (6.6):

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

Уравнение (6.5) представляет собой уравнение Бесселя, решениями которого является цилиндрические функции. При $r = 0$ они должны быть ограниченными, а при $r = a$ удовлетворять условиям, которые являются

следствием (6.2) и (6.2)

$$\frac{dR}{dr} = 0 \quad \text{для ТЕ-мод} \quad (6.7)$$

$$R = 0 \quad \text{для ТМ-мод} \quad (6.8)$$

Таким требованиям отвечают функции Бесселя 1-го рода $J_m(\kappa r)$. Величины поперечных волновых чисел ($\bar{\kappa}$ для ТЕ мод или κ для ТМ мод) определяются как корни трансцендентных уравнений, которые вытекают из граничных условий, причем для ТЕ-моды из (6.7) следует:

$$J'_m(\bar{\kappa}a) = 0 \quad (6.9)$$

Аналогично, для ТМ-моды из (6.8) получим:

$$J_m(\kappa a) = 0 \quad (6.10)$$

2. Определив поперечную волновую функцию как $\psi = J_m(\kappa r)\Phi_m(\varphi)$, и взяв продольную функцию для бегущей волны $\zeta(z) = e^{i\gamma z}$, можем, с помощью общих формул (2.4) и (2.5), найти выражения для компонент полей:

ТЕ-волны	ТМ-волны
$E_\varphi = ik\mu\Phi_m\bar{\kappa}_{mn}J'_m(\bar{\kappa}_{mn}r)e^{i\gamma z}$	$E_\varphi = i\gamma\Phi'_m\frac{1}{r}J_m(\kappa_{mn}r)e^{i\gamma z}$
$E_r = -ik\mu\Phi'_m\frac{1}{r}J_m(\bar{\kappa}_{mn}r)e^{i\gamma z}$	$E_r = i\gamma\Phi_m\kappa_{mn}J'_m(\kappa_{mn}r)e^{i\gamma z}$
$E_z = 0$	$E_z = \kappa_{mn}^2\Phi_mJ_m(\kappa_{mn}r)e^{i\gamma z}$
$H_\varphi = i\gamma\Phi'_m\frac{1}{r}J_m(\bar{\kappa}_{mn}r)e^{i\gamma z}$	$H_\varphi = -ik\varepsilon\Phi_m\kappa_{mn}J'_m(\kappa_{mn}r)e^{i\gamma z}$
$H_r = i\gamma\Phi_m\bar{\kappa}_{mn}J'_m(\bar{\kappa}_{mn}r)e^{i\gamma z}$	$H_r = ik\varepsilon\Phi'_m\frac{1}{r}J_m(\kappa_{mn}r)e^{i\gamma z}$
$H_z = \bar{\kappa}_{mn}^2\Phi_mJ_m(\bar{\kappa}_{mn}r)e^{i\gamma z}$	$H_z = 0$

(6.11)

Штрих здесь означает дифференцирование по всему аргументу ($\kappa_{mn}r$, $\bar{\kappa}_{mn}r$ или $m\varphi$). Собственные волны круглого волновода принято обозначать как E_{mn} и H_{mn} . Для мод круглого волновода индексы m и n

имеют иной смысл, чем в прямоугольном волноводе: m – число периодов тригонометрической функции $\Phi_m(\varphi)$, или число ее узловых диаметров, n – номер корня соответствующего трансцендентного уравнения, (6.9) или (6.10), для нахождения поперечного волнового числа или иначе – число узловых окружностей. По смыслу этих чисел, $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ и $n = 1, 2, 3, \dots$ Картинны распределения полей различных типов волн в круглом волноводе представлены на рис. 6.2.

Wave Type	TM_{01}	TM_{02}	TM_{11}	TE_{01}	TE_{11}
Field distributions in cross-sectional plane at plane of maximum transverse fields					
Field distributions along guide					
Field components present	E_x, E_r, H_ϕ	E_x, E_r, H_ϕ	$E_x, E_r, E_\phi, H_r, H_\phi$	H_r, H_r, E_ϕ	$H_x, H_r, H_\phi, E_\phi, E_\phi$
p_{nl} or p'_{nl}	2.405	5.52	3.83	3.83	1.64
$(k_0)_nl$	$\frac{2.405}{a}$	$\frac{5.52}{a}$	$\frac{3.83}{a}$	$\frac{3.83}{a}$	$\frac{1.64}{a}$
$(\lambda_0)_nl$	$2.51a$	$1.14a$	$1.04a$	$1.64a$	$3.41a$
$(f_0)_nl$	$\frac{0.383}{a\sqrt{\mu/\epsilon}}$	$\frac{0.877}{a\sqrt{\mu/\epsilon}}$	$\frac{0.600}{a\sqrt{\mu/\epsilon}}$	$\frac{0.609}{a\sqrt{\mu/\epsilon}}$	$\frac{0.293}{a\sqrt{\mu/\epsilon}}$
Attenuation due to imperfect conductors	$\frac{R_S}{a\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_0/f)^2}}$	$\frac{R_S}{a\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_0/f)^2}}$	$\frac{R_S}{a\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_0/f)^2}}$	$\frac{R_S}{a\eta} \frac{(f_0/f)^2}{\sqrt{1 - (f_0/f)^2}}$	$\frac{R_S}{a\eta} \frac{1}{\sqrt{1 - (f_0/f)^2}} \left[\left(\frac{f_0}{f} \right)^2 + 0.420 \right]$

Рис. 6.2. Моды круглого волновода.

3. Такие свойства нормальных волн круглого волновода, как характер дисперсии и волновое сопротивление, соответствуют общей теории. Важно только при этом знать, каковы критические частоты различных мод. Согласно (3.2), можем записать

$$\omega_{kp_{mn}} = \frac{c \nu_{mn}}{a \sqrt{\epsilon \mu}},$$

где $\bar{\nu}_{mn} = \bar{\nu}_{mn}a$ и $\nu_{mn} = \nu_{mn}a$ – корни уравнений (6.9), и (6.10).

Несколько первых корней представлены в таблице:

Тип	TM ₀₁	TM ₁₁	TM ₂₁	TE ₀₁	TE ₁₁	TE ₂₁
$\nu_{mn}, \bar{\nu}_{mn}$	2.405	3.74	4.50	3.74	1.841	2.99
$\lambda_{\text{кр}}/2a$	1.31	0.84	0.61	0.84	1.71	1.05

Из таблицы следует, что минимальную критическую частоту имеет волна TE₁₁, для которой $\lambda_{\text{кр}} = 3.413a$. Именно она и является основной в круглом волноводе. Далее по порядку возрастания критических частот идут волны TM₀₁, TE₂₁. Затем следует пара TE₀₁ и TM₁₁ с одинаковыми критическими частотами. Заметим, что в круглом волноводе все пары мод вида TE_{0n} и TM_{1n} оказываются вырожденными, поскольку общим свойством цилиндрических функций является тождество $J'_0(\kappa a) = -J_1(\kappa a)$, из которого следует $\nu_{1n} \equiv \bar{\nu}_{0n}$. Другим, весьма важным вариантом вырождения мод в круглом волноводе является так называемое поляризационное вырождение. Его возможность вытекает из того, что угловая функция $\Phi_m(\varphi)$ не вполне определена. Так, исходя из тригонометрического представления (6.6), можно получить две разные моды, если брать $A \neq 0, B=0$ либо $A = 0, B \neq 0$. При $m \neq 0$ они соответствуют двум разным картинам полей (см. рис. 6.3), которые являются ортогональными в смысле п.4 § 1.3. Это означает что любая мода с индексом $m \neq 0$ по крайней мере двукратно вырождена. При этом в каждой точке поперечного сечения направления векторов поля остаются неизменными во времени, благодаря чему эти моды часто называют линейно поляризованными. Следует однако отметить, что у линейно поляризованных волн круглого волновода ориентации векторов поля в каждом поперечном сечении меняются от точки к точке. Этим они отличаются от линейно поляризованных плоских однородных волн классической оптики.

Рассмотрим теперь собственные волны, у которых угловая функция $\Phi_m(\varphi)$ представлена в экспоненциальной форме, причем либо $C \neq 0, D=0$, либо $C=0, D \neq 0$. У этих волн компоненты полей пропорцио-

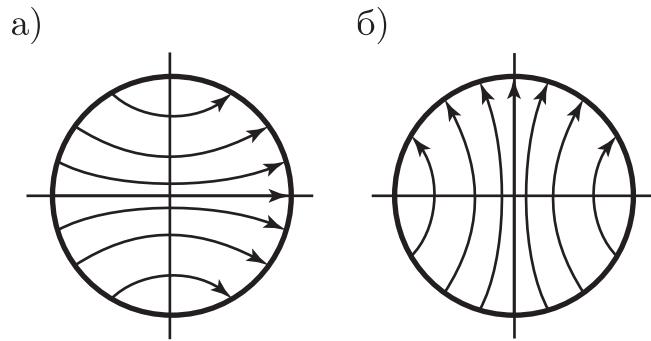


Рис. 6.3. Линии напряженности электрического поля мод TE_{11} различной поляризации: а) горизонтальной, б) вертикальной. Волновод – металлический цилиндрический.

нальны экспоненте $\exp[-i(\omega t \pm m\varphi)]$. Если $C \neq 0$, $D=0$, в показателе следует брать нижний знак (минус), тогда в сечении $z = \text{const}$ аргумент φ возрастает со временем, то есть происходит вращение ориентации вектора поля против часовой стрелки, если смотреть в направлении распространения. При этом вектор поля совершает m оборотов вокруг оси z за период колебаний. Если $C=0$, $D \neq 0$, в экспоненте следует брать знак плюс, и вращение поляризации будет происходить по правому винту. Эти волны называют соответственно левой и правой циркулярно поляризованными волнами. Таким образом, цилиндрический волновод обладает свойством передавать без искажений циркулярно поляризованные волны. Это свойство активно используется в устройствах, содержащих ферриты.

Линейно поляризованную волну можно представить в виде пары волн с круговой поляризацией. Наличие возмущения будет приводить к тому, что линейно поляризованная волна, проходя отрезок волновода, станет в общем случае эллиптически поляризованной. Таким образом, поляризация волны в круглом волноводе оказывается неустойчивой по отношению к малым возмущениям. При наличии возмущения в круглом волноводе постоянные распространения для волн циркулярной поляризации изменя-

нятся, а значит, на конечном отрезке волновода поворот поляризации электрического вектора будет происходить на иной угол, чем в невозмущенной системе. При этом для мод с левой и правой круговой поляризацией изменение угла поворота будет различным. Это свойство типично для всех направляющих систем с цилиндрической симметрией.

4. Система собственных волн круглого волновода обладает свойствами ортогональности и полноты. Следовательно, любое электромагнитное поле в круглом волноводе может быть представлено в виде ряда по рассмотренным выше собственным функциям.

В свою очередь, собственные функции круглого волновода могут быть представлены в виде разложения Фурье по плоским бегущим волнам. Иначе говоря, электромагнитные поля мод волновода можно представлять в виде суммы плоских однородных электромагнитных волн, причем каждая из парциальных волн переходит в другую парциальную волну при отражении от проводящей стенки волновода. Ситуация напоминает прямоугольный волновод, однако там разложение моды по парциальным плоским волнам содержало конечное число слагаемых (не более четырех), а в круглом волноводе таких слагаемых бесконечно много, причем разложение в спектр плоских волн является интегралом Фурье (см. [19]). Однако важно то, что все парциальные плоские волны обязаны обладать тем свойством, которое есть в прямоугольном волноводе: угол между осью волновода и волновым вектором подчиняется условию (5.11). Именно из этого условия следует универсальный закон дисперсии для любых полых волноводов.

5. Кроме характерного распределения полей, каждой нормальной волне волновода присуще свое распределение поверхностных токов. Поясним их происхождение. Для того, чтобы в идеальном проводнике отсутствовали электрическое и магнитное поля, необходимо, чтобы на его поверхности не только обращалась в нуль тангенциальная компонента

электрического поля, $\mathbf{E}_\tau \equiv 0$, но и протекал поверхностный ток с плотностью $\mathbf{j}_{\text{пов}}$, который компенсирует магнитное поле в проводнике. Условие компенсации магнитного поля в проводнике

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{пов}}.$$

Картины распределения поверхностных токов можно найти в [16]. Их знание важно для оценки характера потерь энергии в стенках волновода, регулярных, вызванных конечной проводимостью металла, и избыточных, обусловленных добавочным сопротивлением в месте контакта соседних волноводных секций. В заключение отметим особые свойства некоторых типов волн круглого волновода. Наиболее простую структуру полей и токов имеют волны типа TM_{0n} и TE_{0n} . Для них зависимость от координаты φ отсутствует, так что в формулах (7.9) $\Phi \equiv 1$, $\Phi' \equiv 0$ и лишь три компоненты поля отличны от нуля. Для TM_{0n} -мод это E_z , E_r , TE_φ , а для TE_{0n} -мод — H_z , TE_r , E_φ . Соответственно, у TM_{0n} -мод ток $\mathbf{j}_{\text{пов}}$ имеет только продольные компоненты, а у TE_{0n} -мод — только поперечные компоненты. Волны TE_{0n} имеют ту отличительную особенность, что их затухание не возрастает, а уменьшается с частотой. Причина состоит в том, что на границе волновода магнитное поле имеет только продольную ($z-$) компоненту. Однако при увеличении частоты структура волны все более приближается к плоской однородной, поэтому относительная величина H_z уменьшается, что и ведет к спаданию потерь.

Невырожденными в круглом волноводе остаются лишь волны вида TM_{0n} . У этих волн отличны от нуля лишь три компоненты поля: E_r , E_z и TE_φ , причем напряженность поля не зависит от угловой координаты. Благодаря этому картина поля у моды TM_{0n} оказывается устойчивой по отношению к возмущению, сопровождающему поворот одной секции волновода относительно другой. На практике эти моды, как правило TM_{01} , используют для передачи энергии СВЧ волны между вращающимися

частями волноводного тракта.

В целом ряде случаев поля собственных волн прямоугольного и круглого волноводов имеют качественно подобный вид. Для практики наибольшее значение имеет подобие полей основных типов: TE_{11} круглого и TE_{10} прямоугольного волноводов, – которое делает возможным создание плавных переходов от круглого сечения волновода к прямоугольному и обратно. Однако не существует общего правила, дающего взаимно однозначное соответствие полей круглого и прямоугольного волноводов. Так, в прямоугольном волноводе не может быть аналогов невырожденных мод TM_{0n} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука, 1973, 607 с.
2. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988, 440 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.2. М.: Изд-во Московского университета, 2000, 417 с.
4. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР, 1961, 426 с.
5. Стрэттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.-Л. Гостехиздат. 1948, 540 с.
6. Де-Бройль Л. Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах. М.: ИЛ, 1948, 107 с.
7. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970, 710 с.
8. Гуревич А.Г. Полые резонаторы и волноводы. М.:Сов.радио, 1952, 256 с.
9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Изд-во Московского университета, 2004, 798 с.
10. Мандельштам Л.И. Лекции по теории колебаний. М.: Наука, 1972. 470 с.
11. Альтман Дж.Л. Устройства сверхвысоких частот. М.: Мир. 1968. 487 с.
12. Гинзтон Э.Л. Измерения на сантиметровых волнах. М.: ИЛ. 620 с.
13. Маттей Г.Л., Янг Л., Джонс Е.М.Т. Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи. В 2 т. М.: Связь. 1971.

14. Тишер Ф. Техника измерений на сверхвысоких частотах. М.: Физматгиз, 1963. 367 с.
15. Полосковые линии и устройства сверхвысоких частот. Под редакцией В.М.Седых. Харьков, «Вища школа», 1971. 275 с.
16. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. В 2 т. М.: Высшая школа. 1970.
17. Егоров Ю.В. Частично заполненные прямоугольные волноводы. М.: Сов Радио, 1967.
18. Левин Л. Теория волноводов. М.: Радио и связь. 1981. 312 с.
19. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы, Графики. Таблицы. М.: Наука, 1977. 342 с.
20. Взятышев В.Ф. Диэлектрические волноводы. М.:Сов.радио, 1970, 216 с.
21. Cronin N.J. Microwave and Optical Waveguides. Institute of Physics Publishing. Bristol – Philadelphia. 1995. 119 p.-
22. Шевченко В.В. Наглядная классификация волн, направляемых регулярными открытыми волноводами. Радиотехника и электроника. 1969. Т.14. № 10. С.1768 – 1772.
23. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М.Мир.1984. 512 с.
24. Маркузе Д. Оптические волноводы. М.Мир.1974. 576 с.
25. Виноградова М.Б, Руденко О.В, Сухоруков А.П. Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.
26. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. Наука, 1973. 343 с.
27. Диценко А.Н. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. М.: Сов. радио, 1973. 255 с.
28. Менде Ф.Ф., Бондаренко И.Н., Трубицын А.В.. Сверхпроводящие и охлаждаемые резонансные системы. Киев.: Наукова думка, 1976. 270 с.

29. Физическая акустика. Т.1, ч.А. М.: Мир, 1966. 592 с. (см. статьи Р.Терстон. Распространение звука в жидкостях и твердых телах, с. 13 - 139 и Т.Микер, А.Мейтцлер. Волноводное распространение в протяженных цилиндрах и пластинах, с. 140 – 203).
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248 с.
31. Киттель Ч. Введение в физику твердого тела. М.: Наука, 1978. 791 с.
32. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 639 с.
33. Баранский К.Н. Физическая акустика кристаллов. М.: Изд-во Московского университета, 1991. 143 с.
34. Красильников В.А., Крылов В.В.. Введение в физическую акустику, М.: Наука, 1984. 400 с.
35. Дьелесан Э., Руайе Д.. Упругие волны в твердых телах. М.: Наука, 1982. 424 с.